Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 12

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Dies ist das letzte Blatt, das vor Beginn der vorlesungsfreien Zeit in den Tutorien besprochen wird. Es wird jedoch noch ein freiwilliges Zusatzblatt (Blatt 13) geben, welches für die Vorbereitung auf die Klausur hilfreich ist. Blatt 13 wird weder korrigiert noch besprochen.

Aufgabe 12.1. (Quaternionengruppe) (2+2 Punkte)

Sei $G = \{-1, 1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ die Quaternionengruppe, d.h. die Gruppe der Ordnung 8 in welcher Folgendes gilt:

$$(-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ und } (-1) \cdot a = a \cdot -1 = -a \text{ für } a \in \{i, j, k\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von G normal sind.

(ii) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von G und folgern Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 12.2. (Satz von Cauchy) (4 Punkte)

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in G$ mit $|x| = p$ gibt.

(Hinweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $|G| = pn$. Zeigen Sie die Aussage per Induktion nach n. Betrachten Sie dabei im Induktionsschritt $G/\langle y \rangle$ für ein geeignetes $y \in G$.)

Aufgabe 12.3. (Galoisgruppe & Fixkörper) (2+2 Punkte)

Sei E/F eine Körpererweiterung, seien H_1, H_2 Teilgruppen von $\mathrm{Aut}(E)$ und seien F_1, F_2 Teilkörper von E. Zeigen Sie:

(i) Ist H_1 eine Teilgruppe von H_2, so ist $\mathrm{Inv}(H_2)$ ein Teilkörper von $\mathrm{Inv}(H_1)$.

(ii) Ist F_1 ein Teilkörper von F_2, so ist $\mathrm{Gal}(E/F_2)$ eine Teilgruppe von $\mathrm{Gal}(E/F_1)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Bahnenanzahl) (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Für $g \in G$ sei $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid gx = x\}$. Die Menge $\{Gx \mid x \in X\}$ enthält alle verschiedenen Bahnen von Elementen aus X. Zeigen Sie:

$$|\{Gx \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Abgabe: Montag, den 03. Februar 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.