
Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 13

Hinweis: Dies ist ein freiwilliges Zusatzblatt, welches weder korrigiert noch besprochen wird, für die Vorbereitung auf die Klausur jedoch hilfreich ist. Die Lösungen werden in einer Woche, also ab dem 10. Februar, auf der Homepage der Vorlesung zu finden sein.

Aufgabe 13.1. (Multiplikativität des Gruppenindex)

Seien G, H, K Gruppen, für die $K \leq H \leq G$ gilt und für welche die Gruppenindizes $[G : H]$ und $[H : K]$ endlich sind. Zeigen Sie, dass $[G : K]$ endlich ist und dass

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

gilt.

Aufgabe 13.2. (Galoiserweiterungen)

Seien F, K und E Körper mit $F \subseteq K \subseteq E$. Zeigen Sie:

- (i) Falls E/F eine normale Erweiterung ist, dann ist auch E/K eine normale Erweiterung.
- (ii) Falls E/F eine separable Erweiterung ist, dann ist auch E/K eine separable Erweiterung.
- (iii) Falls E/F eine Galoiserweiterung ist, dann ist auch E/K eine Galoiserweiterung.
- (iv) Falls E/F eine Galoiserweiterung ist und $\text{Gal}(E/K) \trianglelefteq \text{Gal}(E/F)$ gilt, dann ist K/F eine Galoiserweiterung.

Aufgabe 13.3. (Galois-Korrespondenz I)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Zeigen Sie, dass K/\mathbb{Q} eine Galoiserweiterung ist. Bestimmen Sie $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung K/\mathbb{Q} an.

Aufgabe 13.4. (Galois-Korrespondenz II)

Sei $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und sei L ein Zerfällungskörper von f .

- (i) Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$ gilt.
- (ii) Beschreiben Sie die 10 verschiedenen Untergruppen von D_4 .
- (iii) Bestimmen Sie die Zwischenkörper der Erweiterung L/\mathbb{Q} und geben Sie für jeden Zwischenkörper F ein primitives Element für F über \mathbb{Q} an.