Lineare Algebra 1

Blatt 7

Universität Konstanz

13. Februar 2024

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $k \subseteq K$ ein Teilkörper, $m, n \in \mathbb{N}$.
Behauptung:

(a) Seien $A, B \in M_{n\times m}(K)$ beide in r.Z.S.F. Dann ist A genau dann zeilenäquivalent zu B, wenn $A = B$. Insbesondere ist die r.Z.S.F einer Matrix eindeutig.

(b) Sei $A \in M_{n\times m}(k)$, $B \in M_{n\times m}(k)$ die r.Z.S.F von A über k und C die r.Z.S.F. von A über K. Dann ist $B = C$.

Sei nun $A \in M_{n\times m}(k)$ und das homogene LGS S gegeben durch $A\underline{X} = \underline{0}$.

(c) S besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung in k^n, wenn S eine nichttriviale Lösung in K^n besitzt.

(d) Sei $L_k(S)$ die Lösungsmenge von S in k^n und $L_K(S)$ die Lösungsmenge von S in K^n. Dann gilt stets $L_k(S) \subseteq L_K(S)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $k = K$ oder A über K zeilenäquivalent zu I_n ist.

Beweis. (a) Zu zeigen sind zwei Richtungen.
„$\Rightarrow$“: Sei A zeilenäquivalent zu B, zu zeigen ist $A = B$. Aus Satz 16.3 folgt dass A und B denselben Zeilenraum haben, aus Hilfslemma 16.5 folgt $A = B$. Die Beweise dazu werden dieses Jahr wohl nicht gemacht, deshalb entweder vgl. Skript 2019/20 oder Aufgabe 10.1. „$\Leftarrow$“: Ist klar.

(b) Da A zeilenäquivalent zu B über $k \subseteq K$ ist, und A zeilenäquivalent zu C über K, ist insbesondere B zeilenäquivalent zu C über K. Da B in r.Z.S.F. über k ist und $k \subseteq K$, ist auch B in r.Z.S.F. über K und somit nach (a) auch $B = C$.

(c) Zu zeigen sind zwei Richtungen.
„$\Rightarrow$“: Ist klar wegen $k \subseteq K$.
„$\Leftarrow$“: Habe S eine nichttriviale Lösung in K^n. Für $F \in \{k, K\}$ gilt nach Korollar 7.4

$$S \text{ hat nichttriviale Lösungen in } F^n \iff A \text{ ist nicht zeilenäquivalent zu } I_n \text{ (über } F)$$

Da $k \subseteq K$ ist die Einheitsmatrix $I_n \in M_{n\times n}(k)$ gleich der Einheitsmatrix $I_n \in M_{n\times n}(K)$. Da S eine nichttriviale Lösung in K^n hat, folgt A ist nicht zeilenäquivalent zu I_n über K. Da $k \subseteq K$ ist damit aso insbesondere A nicht zeilenäquivalent zu I_n über k, also hat nach obiger Feststellung auch S eine nichttriviale Lösung in k^n.

(d) Dass $L_k(S) \subseteq L_K(S)$ gilt, ist wegen $k \subseteq K$ klar. Zu zeigen bleibt, dass

$$L_k(S) = L_K(S) \iff k = K \text{ oder } A \text{ ist über } K \text{ zeilenäquivalent zu } I_n$$

„$\Rightarrow$“: Wir nehmen an, dass A nicht zeilqnäquivalent zu I_n über K ist und wollen zeigen, dass dann bereits $k = K$ gilt. Da $k \subseteq K$ reicht es dafür, $K \subseteq k$ zu zeigen. Sei $x \in K$ beliebig, $B = (b_{ij})$ die r.Z.S.F. von A über K. Da A nicht zeilenäquivalent zu I_n über K ist, muss $b_{n1} = \ldots = b_{nn} = 0$ gelten, d.h. die letzte Zeile von B ist eine Nullzeile. Nach 5.8 aus dem Skript gilt $L_K(S) = L_K(S')$ mit $S' \colon B\underline{X} = \underline{0}$. Die Variable x_n ist eine freie Variable da die letzte Zeile von B eine Nullzeile ist, wir können also $x_n = 0$ setzen. Da $L_K(S) \subseteq L_k(S) \subseteq k^n$ muss bereits $x \in K$ gelten, was wir zeigen wollten.
„$\Leftarrow$“: Ist A zeilenäquivalent zu I_n über K, so ist $L_K(S) = \{0\} = L_k(S)$. Ist $k = K$ so ist die Aussage klar.

$\square$