Transferaufgaben – Lineare Algebra I

Hinweis: Hierbei handelt es sich um zusätzliche Übungsaufgaben, die weder abgegeben noch korrigiert werden. Viele der Aufgaben sind zu schwer oder zu lang für eine Klausur, sie dienen nur der Übung und dem Vertiefen des Stoffs. Es werden keine Lösungen veröffentlicht, zu einigen Aufgaben finden sich aber Lösungen im Internet.

In allen Aussagen seien $l, m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

1 Gruppen, Ringe und Körper

(i) Zeige $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(l,m),n) = \mathrm{ggT}(l,\mathrm{ggT}(m,n))$. Welche Gruppenaxiome erfüllt die Struktur $(\mathbb{N}_0, \mathrm{ggT})$? (*leicht*)

(ii) Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe mit einer der beiden Eigenschaften

a) $\forall x \in G : x^2 = e$

b) $\forall x, y \in G : (xy)^2 = x^2y^2$

Zeige, dass G in beiden Fällen eine abelsche Gruppe ist und gib jeweils ein Beispiel einer Gruppe welche die Bedingung erfüllt an. (*leicht*)

(iii) Sei K ein endlicher Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$. Zeige, dass K ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist. Folgere $|K| = p^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. (*mittel*)

(iv) Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{gV}(m,n) := \{d \in \mathbb{N} : m \mid d \wedge n \mid d\}$ die Menge der *gemeinsamen Vielfachen* von m und n. Die Zahl $\mathrm{kgV}(m,n) := \min \mathrm{gV}(m,n)$ heißt *kleinste gemeinsame Vielfache* von m und n. Zeige:

a) $\forall d \in \mathrm{gV}(m,n) : \mathrm{kgV}(m,n) \mid d$ (leicht)

b) $\mathrm{ggT}(m,n) = 1 \Rightarrow \mathrm{kgV}(m,n) = mn$ (schwer)

c) $\mathrm{ggT}(m,n)\,\mathrm{kgV}(m,n) = mn$ (schwer)

(v) Seien $p, q \in \mathbb{N}$ verschiedene Primzahlen. Zeige $|\{n \in \{0, \ldots, pq-1\} : p|n \vee q|n\}| = p + q - 1$ und folgere $|\mathbb{Z}_{pq}^\times| = (p-1)(q-1)$. (*mittel*)

(vi) Sei R ein integrer Ring mit Eins, der kein Körper ist. Zeige R ist unendlich. (*schwer*)

2 Matrizen und Gleichungssysteme

(i) Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeige $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$. (*leicht*)

(ii) Seien $A, B \in K^{n\times n}$, so dass AB invertierbar ist. Zeige auf mindestens zwei verschiedene Weisen, dass dann auch A und B invertierbar sind. (*leicht*)

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Konstruiere ein lineares Gleichungssystem mit exakt n Lösungen. (*leicht*)

(iv) Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $A^2 = A$. Zeige entweder gilt $A = I_n$ oder A ist singulär. (*leicht*)

(v) Seien $A, B \in K^{m\times n}$. Zeige $\operatorname{rang}(A + B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$ und gib ein Beispiel an bei dem die Ungleichung strikt ist und eines bei dem Gleichheit gilt. (*mittel*)

(vi) Zeige für $A \in K^{n\times n}$ gilt $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$ genau dann, wenn es ein $c \in K$ gibt mit $A = cI_n$. (*mittel*)

(vii) Sei $A \in K^{n\times n}$. Zeige $\operatorname{rang}(A) \leq 1 \Leftrightarrow \exists u \in K^{n\times 1} : \exists v \in K^{1\times n} : A = uv$. (*mittel*)

(viii) Sei K endlich und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Zeige $\exists m \in \mathbb{N} : A^m = I_n$. (*mittel*)

(ix) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $AA^T = 0$. Zeige $A = 0$. Für welche der Körper $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$ bleibt diese Folgerung richtig? (*mittel*)

(x) Sei $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{m\times m}$ invertierbar. Zeige $\operatorname{rang}(BA) = \operatorname{rang}(A)$. (*mittel*)

(xi) Sei K ein endlicher Körper. Bestimme die exakte Anzahl aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen über K. (*schwer*)

(xii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeige $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T) = \operatorname{rang}(A^T A) = \operatorname{rang}(AA^T)$. (*schwer*)

3 Vektorräume

(i) Zeige die Struktur $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ gemeinsam mit $\boxdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, (\frac{a}{b}, x) \mapsto \sqrt[b]{x^a}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Gilt diese Aussage auch mit $\mathbb{Q}_{>0}$ anstelle von $\mathbb{R}_{>0}$? (*leicht*)

(ii) Seien U, V Unterräume von W. Zeige $\dim(U \cap V) \geq \dim U + \dim V - \dim W$. (*leicht*)

(iii) Bestimme die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraums $L(\mathbb{R}^4 \times L(\mathbb{R}^{3\times 6}, \mathbb{R}^9), \mathbb{R}[x]_{\leq 5})$. (*leicht*)

(iv) Seien U, V, W Unterräume des K-Vektorraums X. Beweise oder widerlege jeweils durch ein Gegenbeispiel

a) $(U+V) \cap W \subseteq (U \cap W) + (V \cap W)$ (*leicht*)

b) $(U+V) \cap W \supseteq (U \cap W) + (V \cap W)$ (*leicht*)

(v) Seien U, V Unterräume von W. Zeige $\dim U + \dim V = \dim(U+V) \Leftrightarrow U \cap V = \{0\}$. (*mittel*)

(vi) Sei $\dim V < \infty$. Sei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen von V, das heißt für alle $i \in \mathbb{N}$ ist V_i ein Unterraum von V und es gilt stets $V_i \subseteq V_{i+1}$. Zeige $\exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N : V_m = V_N$. (*mittel*)

(vii) Sei $k \subseteq K$ ein Unterkörper von K. Zeige, dass der K-Vektorraum V auch als k-Vektorraum aufgefasst werden kann, durch Einschränken der Skalarmultiplikation. Zeige weiter $\dim_K(V) \leq \dim_k(V)$, das heißt die Dimension von V als K-Vektorraum ist höchstens so groß wie die Dimension von V als k-Vektorraum. Gib jeweils ein Beispiel, in dem die Dimension einmal gleich und einmal verschieden ist. (*mittel*)

(viii) Sei K ein endlicher Körper und $n = \dim V$. Bestimme die exakte Anzahl aller Unterräume von V mit Dimension genau $l \leq n$. (*schwer*)

(ix) Zeige: Es existiert kein Körper K, für den es eine Abbildung $\odot : K \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gibt, sodass $(\mathbb{Z}, +, \odot)$ ein K-Vektorraum ist. (*schwer*)

4 Lineare Abbildungen

(i) Sei $f : K \to K$. Zeige: f ist K-linear $\Leftrightarrow \forall \lambda, x \in K : f(\lambda x) = \lambda f(x)$. (*leicht*)

(ii) Sei $\dim V$ ungerade und $T : V \to V$ linear. Zeige $R_T \neq \ker T$. (*leicht*)

(iii) Sei $T : V \to W$ linear. Zeige:

a) T injektiv $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$

b) T surjektiv $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

c) T bijektiv $\Rightarrow \dim V = \dim W$

Gelten diese Implikationen jeweils auch umgekehrt? (*leicht*)

(iv) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und gelte $n = \dim V$ sowie $k = \dim U$. Zeige es gibt $T, S \in L(V, V)$ mit $R_T = U$, $R_{S \circ T} = \{0\}$ und $\dim R_S = n - k$. (*mittel*)

(v) Seien $S \in L(V, W)$ und $T \in L(V, U)$. Zeige $\operatorname{rang}(S \circ T) \leq \min\{\operatorname{rang}(T), \operatorname{rang}(S)\}$. (*mittel*)

(vi) Die Äquivalenz in (i) gilt nicht für $K = \mathbb{R}$ mit $\forall x, y \in K : f(x + y) = f(x) + f(y)$ anstelle der rechten Bedingung. Konstruiere ein konkretes Gegenbeispiel hierfür, also eine additive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht $\mathbb{R}$-linear ist. (*schwer*)

5 Determinante

(i) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Zeige per Induktion $\det(A) \in \mathbb{Z}$. Gilt umgekehrt auch $\forall A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$: $\det(A) \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$? (*leicht*)

(ii) Sei $c \in K$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeige $\det(cA) = c^n \det(A)$. (*leicht*)

(iii) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$. Zeige $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n} \Rightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}$. Gilt diese Implikation auch umgekehrt? (*mittel*)

(iv) Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ für die die Menge $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = c\}$ mit Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Gilt eine analoge Aussage für jeden beliebigen Körper K? (*mittel*)

(v) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A_{ij} \in \{1, -1\}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige $2^{n-1} \mid \det(A)$ unter Verwendung von Typ 2 Zeilenumformungen. (*mittel*)