Wie in der Plenumsübung erläutert genügt es, nun noch zu zeigen, dass

$$\mathcal{V} = \{K \in \mathcal{M} \mid \forall L \in \mathcal{M}\colon [L \subseteq K \vee K \subseteq L]\}$$

(+)-abgeschlossen ist. Wir tun dies in drei Schritten.

1. Wir weisen zunächst die zweite Abgeschlossenheitseigenschaft für $\mathcal{V}$ nach.

   Sei hierzu $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ eine Kette in $\mathcal{V}$. Wir zeigen, dass $\overline{\mathcal{K}} \in \mathcal{V}$. Bemerke zunächst, dass $\overline{\mathcal{K}} \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist. Sei nun $L \in \mathcal{M}$. Falls $I \subseteq L$ für alle $I \in \mathcal{K}$ gilt, so ist auch $\overline{\mathcal{K}} \subseteq L$. Andernfalls gibt es ein $I \in \mathcal{K}$ mit $I \not\subseteq L$. Da $I \in \mathcal{V}$, erhalten wir $L \subseteq I$. Aus $I \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ folgt daher $L \subseteq \overline{\mathcal{K}}$. Damit haben wir wie gewünscht gezeigt, dass für alle $L \in \mathcal{M}$ gilt: $\overline{\mathcal{K}} \subseteq L$ oder $L \subseteq \overline{\mathcal{K}}$.

2. Jetzt beweisen wir folgende Hilfsaussage: *Für alle $K \in \mathcal{V}$ und alle $L \in \mathcal{M}$ gilt $L \subseteq K$ oder $K^+ \subseteq L$.*

   Sei also $K \in \mathcal{V}$. Setze

   $$\mathcal{N} = \{L \in \mathcal{M} \mid L \subseteq K \vee K^+ \subseteq L\}.$$

   Um die Hilfsaussage zu beweisen, zeigen wir nun, dass $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Hierfür genügt es, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ nachzuweisen, was gilt, wenn $\mathcal{N}$ abgeschlossen ist. Wir zeigen daher, dass $\mathcal{N}$ abgeschlossen ist.

   Erste Abgeschlossenheitseigenschaft: Sei $L \in \mathcal{N}$. Da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, ist $L^+ \in \mathcal{M}$. Nach Definition von $\mathcal{N}$ haben wir $L \subsetneq K$ oder $L = K$ oder $K^+ \subseteq L$. Falls $L = K$ oder $K^+ \subseteq L$, so folgt direkt $K^+ \subseteq L^+$, also $L^+ \in \mathcal{N}$. Falls $L \subsetneq K$, so haben wir (da $K \in \mathcal{V}$) entweder $L^+ \subseteq K$ oder $K \subsetneq L^+$. Im Fall $K \subsetneq L^+$ erhalten wir jedoch $L \subsetneq K \subsetneq L^+$, was der Tatsache widerspricht, dass L^+ maximal ein Element mehr als L enthält. Daher gilt $L^+ \subseteq K$, woraus $L^+ \in \mathcal{N}$ folgt.

   Zweite Abgeschlossenheitseigenschaft: Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ eine Kette. Da $\mathcal{C}$ auch eine Kette in $\mathcal{M}$ ist, folgt aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$, dass $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}$. Falls für jedes $I \in \mathcal{C}$ schon $I \subseteq K$ gilt, so ist $\overline{\mathcal{C}} \subseteq K$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$. Andernfalls gibt es ein $I \in \mathcal{C}$ mit $K \subsetneq I$ (denn $K \in \mathcal{V}$). Aus $I \in \mathcal{N}$ folgt dann $K^+ \subseteq I$. Wir erhalten $K^+ \subseteq \overline{\mathcal{C}}$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$, wie gewünscht.

3. Wir weisen nun die erste Abgeschlossenheitseigenschaft für $\mathcal{V}$ nach.

   Sei dafür $K \in \mathcal{V}$. Bemerke zunächst, dass $K^+ \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist. Nach obiger Hilfsaussage gilt für alle $L \in \mathcal{M}$ schon $L \subseteq K \subseteq K^+$ oder $K^+ \subseteq L$. Damit ist K^+ mit jedem Element in $\mathcal{M}$ vergleichbar, woraus wie gewünscht $K^+ \in \mathcal{V}$ folgt.