Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 2020

Dr. S. Frei

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Blatt 6

Aufgabe 11

Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität, Injektivität und Surjektivität. Geben Sie im Falle einer linearen Abbildung, wenn möglich, die Matrixdarstellung bezüglich der natürlichen Basis $\mathcal{N}$ an.

a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ (Skalarprodukt)

b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 3}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (Matrixprodukt)

c) $\varphi_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|$

d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \end{pmatrix}$

e) $\varphi_6 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+i \\ y-i \end{pmatrix}$

Aufgabe 12

a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der folgenden linearen Abbildung bzgl. der natürlichen Basis $\mathcal{N}$ im Urbildraum und der Basis $\mathcal{A}$ im Zielraum.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-z \\ -x+3y+3z \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Es seien

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \\ 5y \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Welche Matrixdarstellung besitzt φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ in Urbildraum und der natürlichen Basis $\mathcal{N}$ im Zielraum?

(2) Bestimmen Sie den Kern von φ. Ist φ injektiv?

Bitte wenden!

Aufgabe 13

a) Welche Matrixdarstellung A (bezüglich der natürlichen Basis) hat die lineare Abbildung φ, die den Raum $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $E : 2x - y - 2z = 0$ projiziert?

b) Es sei ψ die lineare Abbildung, welche jeden Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R} \setminus \vec{0}$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ entgegen des Uhrzeigersinns dreht. Welche Matrixdarstellung (bezüglich der natürlichen Basis) besitzt diese Abbildung ψ?

c) Durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird der $\mathbb{R}^3$ zuerst um die $x-$Achse, dann um die y-Achse und schließlich um die z-Achse jeweils um $\pi/2$ gedreht. Bestimmen Sie die Matrix A von φ bezüglich der natürlichen Basis.

d) Ermitteln Sie die Drehmatrix D_α, welche die Gerade $G_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$ in die Gerade $G_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ überführt.

Besprechung und Abgabe (für die Bonuspunkteregelung):

- **Aufgabe 11** muss **nicht** abgegeben werden und soll bereits in den Übungsgruppen am 03. bzw. 04.06. besprochen werden
- Für die **Bonuspunkteregelung** soll eine der **Aufgaben 12 oder 13** bis spätestens **Di, 16.06.2020, 12:00** (wegen der Nachklausur am Vortag ausnahmsweise einen Tag später) in Ihrer Übungsgruppe auf ILIAS abgegeben werden. Die Besprechung erfolgt dann in den Übungsgruppen am 17. bzw. 18.06.2020.