Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 2020

Dr. S. Frei

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Blatt 9

Aufgabe 18

a) Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y, \quad x(0) = 5\\ \dot{y} &= x + 3y, \quad y(0) = -1\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + 6, \quad x(0) = -3\\ \dot{y} &= x + 3y - 6, \quad y(0) = 5\end{aligned}$$

Aufgabe 19

Die Dynamik einer Epidemie lässt sich mit folgendem System aus nichtlinearen Differentialgleichungen für den Anteil $s(t)$ der zum Zeitpunkt anfälligen und den Anteil $i(t)$ der Infizierten einer Population beschreiben (siehe Vorlesung 1)

$$\begin{aligned}s'(t) &= -\beta i(t)s(t)\\ i'(t) &= \beta i(t)s(t) - t_{\text{inf}}^{-1} i(t).\end{aligned}$$

Mithilfe von Taylor-Entwicklung erhält man eine lineare Approximation für die rechte Seite und damit ein inhomogenes **lineares** Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} s'(t)\\ i'(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\beta i_0 & -\beta s_0\\ \beta i_0 & \beta s_0 - t_{\text{inf}}^{-1}\end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} s(t)\\ i(t)\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta s_0 i_0\\ -\beta s_0 i_0\end{pmatrix}}_{:=\vec{b}} \tag{1}$$

a) Überprüfen Sie, dass $\begin{pmatrix} s(t)\\ i(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0\\ 0\end{pmatrix}$ eine partikuläre Lösung des Systems (1) ist.

b) Für die Parameter $s_0 = 0.98$, $i_0 = 0.01$, $t_{inf} = 6.5$ und $\beta = 0.2$ hat die Matrix A (gerundet) die folgenden Eigenwerte λ_1 und λ_2 und zugehörige Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$

$$\lambda_1 \approx 0.01, \quad \lambda_2 \approx 0.03, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1\\ 0.06\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.99\\ -0.16\end{pmatrix}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (1) an.

c) Berechnen Sie aus der allgemeinen Lösung die Lösung der Anfangswertaufgabe zu den Anfangswerten $s(0) = s_0 = 0.98$ und $i(0) = i_0 = 0.01$.

d) Nun betrachten wir die reduzierte Kontaktrate $\beta = 0.1$. Bei gleichen s_0, i_0, t_{inf} sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A

$$\lambda_1 \approx -0.0028, \quad \lambda_2 \approx -0.054, \quad \vec{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.02 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems an, sowie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten aus Teil c).

e) *(Zusatzaufgabe)* Skizzieren Sie die Kurven der Infizierten $i(t)$ für die in c) und d) erhaltenen Lösungen der Anfangswertaufgaben (2. Komponente) über die Zeit.

Abgabe (für die Bonuspunkteregelung): Mo, 06.07.2020, 12:00 in Ihrer Übungsgruppe auf ILIAS.