Universität Konstanz

Mathematik II

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 1: Skalare Differentialgleichungen (Teil 2)

Dr. Stefan Frei, 20.04.2020

12.2: Skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition:

- Unter einer skalaren Differentialgleichung 1. Ordnung versteht man eine Gleichung der Form
$$x'(t) \;=\; f(t, x(t)) \qquad \text{oder kurz} \qquad x' \;=\; f(t, x) \tag{1}$$
mit einer reellwertigen Funktion f, welche von zwei Variablen abhängt.

- Eine skalare Differentialgleichung 1. Ordnung heißt autonom, falls die rechte Seite in (1) nicht explizit von t abhängt, also die Form
$$x'(t) \;=\; f(x(t)) \qquad \text{oder kurz} \qquad x' \;=\; f(x)$$
hat mit einer reellen Funktion f.

Alle bislang betrachteten DGLn sind autonom.

Anfangswertaufgaben

Differentialgleichungen können (unendlich) viele Lösungen haben. Deswegen stellt man in der Regel zusätzliche Bedingungen.

Definition: Eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung heißt Anfangswertaufgabe:

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = \alpha . \tag{2}$$

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf):
Es seien $f(t,x)$ selbst und die partielle Ableitung $f_x(t,x)$ stetig. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (2) genau eine Lösung.

- Ist f nur stetig, aber nicht partiell differenzierbar, so existiert eine Lösung von (2), diese muss aber nicht eindeutig sein.

Beispiel einer nichtautonomen Anfangswertaufgabe

Anfangswertaufgabe

$$x' = -2tx, \quad x(1) = 1$$

- Die rechte Seite $f(t,x) = -2tx$ und $\partial_x f(t,x)$ sind stetig $\mapsto$ eindeutige Lösung
- Allgemeine **Lösung der Differentialgleichung** (siehe unten)

$$x(t) = c\exp(-t^2), \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}.$$

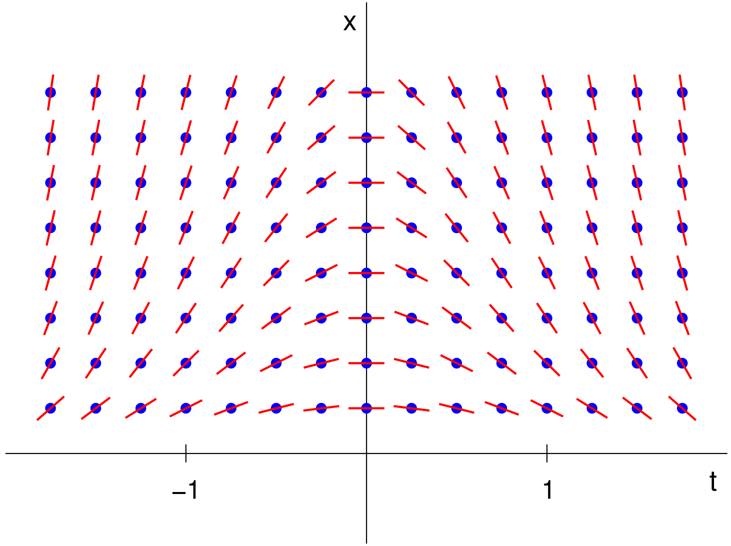
- **Anfangsbedingung**

$$c\exp(-1) = 1 \Rightarrow c = e$$
$$\Rightarrow x(t) = e\exp(-t^2) = \exp(1 - t^2)$$

Richtungsfeld

Richtungsfeld: Im (t, x)-Koordinatensystem wird in jedem Punkt (t_0, x_0) die Steigung $f(t_0, x_0)$ eingezeichnet.

Beispiel: Richtungsfeld zu $\dot{x} = -2tx$



Je nach Startwert $x(t_0)$ folgen die Lösungstrajektorien $x(t)$ den im Diagramm vorgegebenen Richtungen

12.3: Separation der Variablen

Analytische Lösung von Differentialgleichungen nur bei spezieller Struktur möglich

Methode 'Separation der Variablen'
Gegeben sei eine Anfangswertaufgabe (AWA)

$$x' = f(x,t), \quad x(t_0) = \alpha$$

mit "trennbaren Variablen"

$$f(t,x) = g(x)h(t)$$

Beispiele:

- $f(t,x) = 2xt \quad \rightarrow \quad g(x) = 2x,\ h(t) = t$
- Verhulst-Gleichung (Logistisches Wachstum, Wachstumsprozess mit Sättigung)

$$x'(t) = Rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad K > 0$$

Hier ist z.B.

$$f(t,x) = g(x)h(t) \quad \text{mit} \quad g(x) = Rx(1 - \frac{x}{K}),\ h(t) = 1$$

Separation der Variablen (Praktisches Vorgehen)

Wir schreiben

$$x' = \frac{dx}{dt} = g(x) \cdot h(t)$$

und formen (mathematisch etwas unpräzise) um

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t)dt.$$

Integration über $r \in [t_0, t]$ auf der rechten Seite und über die entsprechenden Grenzen $y \in [\alpha, x]$ auf der linken Seite ergibt

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{g(y)} \, dy = \int_{t_0}^{t} h(r) \, dr \quad .$$

Wenn nun Stammfunktionen F zu $1/g$ und H zu h bekannt sind, so folgt

$$F(x) - F(\alpha) = H(t) - H(t_0).$$

Wenn wir $F(x)$ nach x auflösen können, haben wir eine Lösung der AWA gefunden.

Separation der Variablen (Mathematisch präziser)

Mathematisch etwas präziser folgt aus $x'(t) = g(x(t)) \cdot h(t)$, dass

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t)$$

Wir integrieren von t_0 bis t und nennen die Integrationsvariable r

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(r)}{g(x(r))}\, dr \;=\; \int_{t_0}^{t} h(r)\, dr.$$

Mit der Substitutionsformel für Integrale angewendet auf die Substitution $y = x(r)$ folgt für das erste Integral

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{g(y)}\, dy \;=\; \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(x(r))} x'(r)\, dr \;=\; \int_{t_0}^{t} h(r)\, dr.$$

Ist nun F eine Stammfunktion zu $1/g$ und H eine Stammfunktion h, so folgt wieder

$$F(x) - F(\alpha) \;=\; H(t) - H(t_0).$$

Beispiel Separation der Variablen

Wir lösen die AWA

$$x' = -2tx, \quad x(0) = 2$$

Aus $\frac{dx}{dt} = -2tx$ folgt

$$\frac{1}{x}\,dx = -2t\,dt$$

Integration über $r \in [0, t]$ und entsprechend $y \in [2, x]$ ergibt

$$\int_2^x \frac{1}{y}\,dy = \int_0^t -2r\,dr$$

Mit den Stammfunktionen $F(y) = \ln(|y|)$ und $H(r) = -r^2$ folgt

$$\ln(x) - \ln(2) = -t^2 \quad \Rightarrow \ln(x) = \ln(2) - t^2$$

und damit

$$x(t) = \exp(\ln(2) - t^2) = 2\exp(-t^2)$$

Probe?

Beispiel Verhulst-Gleichung

Wir lösen die AWA

$$x' = Rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = \alpha,$$

wobei $0 < \alpha < K$. Umgeformt gilt

$$\frac{dx}{dt} = Rx\left(\frac{K - x}{K}\right)$$

und damit

$$\frac{K}{x(K-x)}dx = Rdt.$$

Nach Integration folgt

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{K}{y(K-y)}dy = \int_{0}^{t} Rdr = Rt.$$

Wir benötigen noch eine Stammfunktion für die linke Seite.

Beispiel Verhulst-Gleichung (2)

Dazu führen wir eine Partialbruchzerlegung durch (nachrechnen!)

$$\frac{K}{y(K-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}$$

Die Stammfunktion ist

$$F(y) = \ln(|y|) - \ln(|K-y|) = \ln\left(\frac{|y|}{|K-y|}\right).$$

Es folgt also

$$\ln\left(\frac{|x|}{|K-x|}\right) - \ln\left(\frac{|\alpha|}{|K-\alpha|}\right) = Rt.$$

Solange $0 < x < K$ folgt

$$\frac{x}{K-x} = \exp\left(Rt + \ln\left(\frac{\alpha}{K-\alpha}\right)\right) = \frac{\alpha}{K-\alpha}\exp(Rt)$$

Auflösen nach x?

Beispiel Verhulst-Gleichung (3)

Aus

$$\frac{x}{K-x} = \frac{\alpha}{K-\alpha}\exp(Rt)$$

folgt

$$(K-\alpha)x = (K-x)\alpha\exp(Rt)$$

und weiter

$$x\left(K-\alpha+\alpha\exp(Rt)\right) = \alpha K\exp(Rt)$$

Es ergibt sich die Lösung

$$x(t) = \frac{\alpha K\exp(Rt)}{K-\alpha+\alpha\exp(Rt)} = \frac{K}{\left(\frac{K}{\alpha}-1\right)\exp(-Rt)+1}, \qquad x(t)\in(0,K)$$

oder anders geschrieben mit $b := \ln\left(\frac{K}{\alpha}-1\right)$

$$x(t) = \frac{K}{1+\exp(b-Rt)}$$