Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 10: Bereichsintegrale (Kap 20)

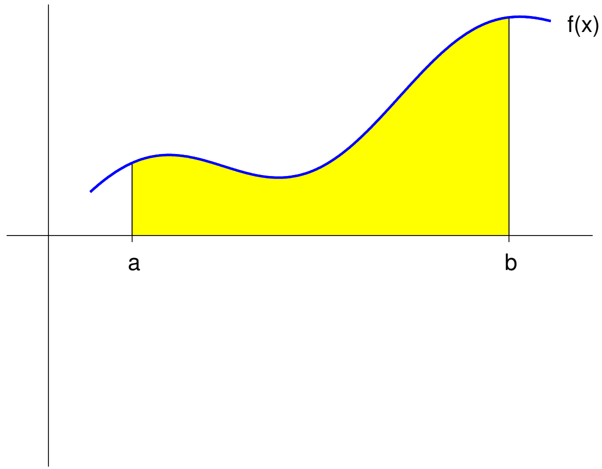
Dr. Stefan Frei, 06.07.2020

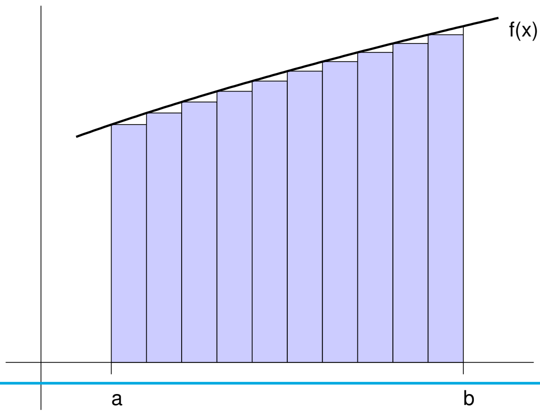
Wiederholung: Integration in 1d

Das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

über dem Intervall $[a, b]$ beschreibt für $f \geq 0$ den Flächeninhalt "unter" dem Graph von f



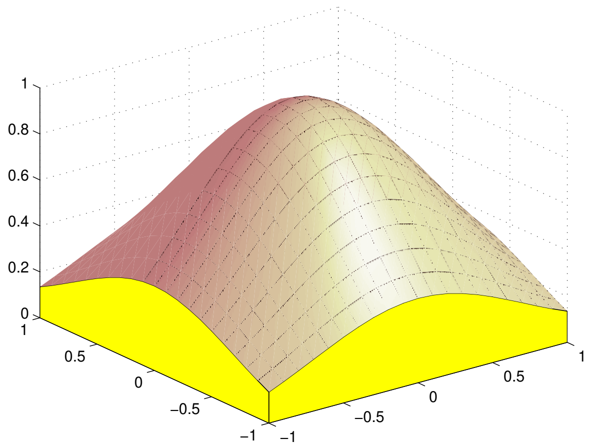


Definition über Riemann-Summen mit N Teilintervallen und $N \to \infty$ ($dx \to 0$)

Bereichsintegrale

Heute: Integrale über eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$

$$V = \int_B f(x, y)\, dF = \int_B f(x, y)\, dx dy.$$



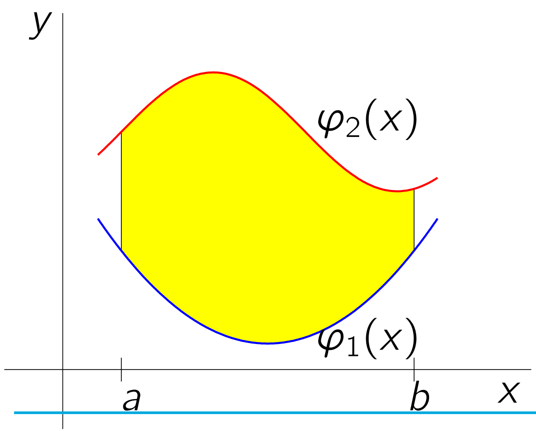
- Für $f \geq 0$ ist V das Volumen “unter“ dem Graphen
- $dF = dx \cdot dy$ ist das Flächenelement

Normalbereiche in der Ebene

Typ 1:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ und } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

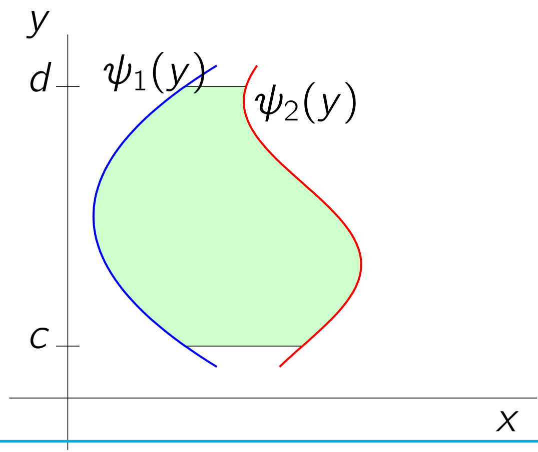
mit stetig diff'baren Funktionen
$\varphi_1,\ \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.



Typ 2:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \text{ und } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

mit stetig diff'baren Funktionen
$\psi_1,\ \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.



Beispiele

- Integrale über Normalbereiche werden sich relativ einfach berechnen lassen

Beispiele:

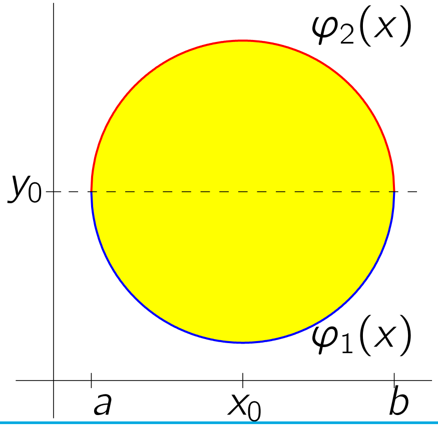
1. Das Rechteck
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq y \leq d\}$$
ist ein Normalbereich.
(i) Typ 1: $\varphi_1(x) = c,\ \varphi_2(x) = d$,
(ii) Typ 2: $\psi_1(y) = a,\ \psi_2(y) = b$.

Beispiel 2

Kreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$

(i) Darstellung als Normalbereich vom Typ 1:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) &= y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \quad &\text{(unterer Halbkreis)},\\
\varphi_2 &: [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) &= y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \quad &\text{(oberer Halbkreis)}.
\end{aligned}$$

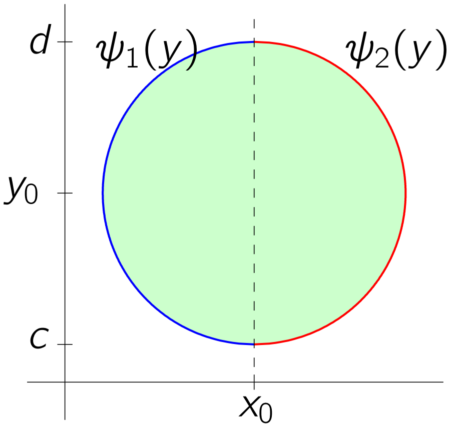


$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r \text{ und } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Beispiel 2 (Teil 2)

(ii) Darstellung als Normalbereich vom Typ 2:

$$\psi_1 : [y_0 - r, y_0 + r] \to \mathbb{R}, \quad \psi_1(y) = x_0 - \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2} \quad \text{(linker Halbkreis)},$$
$$\psi_2 : [y_0 - r, y_0 + r] \to \mathbb{R}, \quad \psi_2(y) = x_0 + \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2} \quad \text{(rechter Halbkreis)}.$$

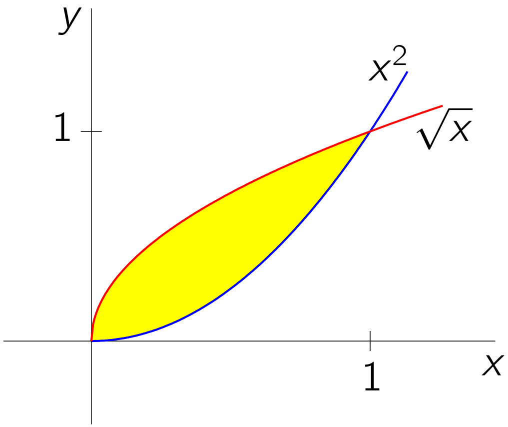


$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_0 - r \leq y \leq y_0 + r \text{ und } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

Beispiel 3

Es sei $\varphi_1(x) = x^2\,,\ \varphi_2(x) = \sqrt{x}$.

$$B \;=\; \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1\,,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\}\;.$$



Integration über Normalbereiche

Ist B ein Normalbereich vom Typ 1, so kann das Bereichsintegral über B über 2 eindimensionale Integrationen berechnet werden

$$\int_B f(x,y)\,dF = \int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Entsprechend erhalten wir für einen Normalbereich vom Typ 2

$$\int_B f(x,y)\,dF = \int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beispiel 1

Wir integrieren $f(x, y) = \exp(x + y)$ über das Rechteck

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; a \le x \le b, \;\; c \le y \le d\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_B \exp(x + y)\, dx\, dy \;&=\; \int_a^b \left(\int_c^d \exp(x + y)\, dy \right) dx \\
&=\; \int_a^b \left[\exp(x + d) - \exp(x + c)\right]\, dx \\
&=\; \Big[\exp(x + d) - \exp(x + c)\Big]_a^b \\
&=\; \exp(b + d) - \exp(b + c) - \exp(a + d) + \exp(a + c).
\end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir integrieren $f(x, y) = 2x^2y$ über den oberen Halbkreis um den Ursprung mit Radius 2:

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -2 \leq x \leq 2,\;\; 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\} \quad .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_B 2x^2y\,dx\,dy &= \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 2x^2y\,dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\left[x^2y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(4x^2 - x^4\right) dx = \frac{128}{15} . \end{aligned}$$

Berechnung des Flächeninhalts

Das Bereichsintegral zu $f \equiv 1$ liefert den Flächeninhalt von B:

$$F(B) = \int_B 1\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dy \right) dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx$$

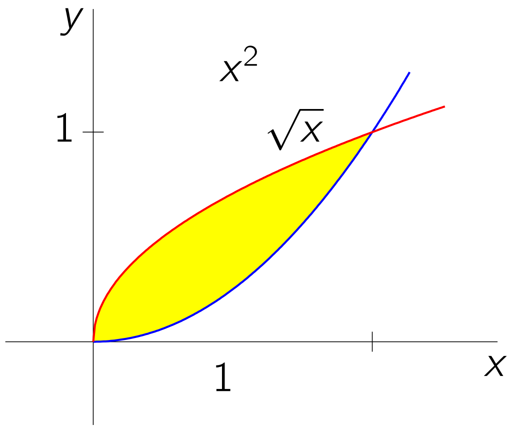
bzw.

$$F(B) = \int_B 1\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} 1\,dx \right) dy = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\,dy.$$

Beispiel Flächeninhalt

Wir berechnen den Flächeninhalt des Bereichs

$$B \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0\le x\le 1\,,\; x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$$



$$F(B) \;=\; \int_B 1\,dx\,dy \;=\; \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right)\,dx$$

$$=\; \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx$$

$$=\; \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 \;=\; \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{3}.$$

Rechenregeln und Eigenschaften

1. Linearität bzgl des Integranden

$$\int_B [f(x,y) + g(x,y)]\; dx\,dy \;=\; \int_B f(x,y)\,dx\,dy \;+\; \int_B g(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_B \lambda \cdot f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \lambda \cdot \int_B f(x,y)\,dx\,dy \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. Ist B eine Nullmenge (d.h. ein Bereich mit Flächeninhalt 0), so folgt

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy \;=\; 0.$$

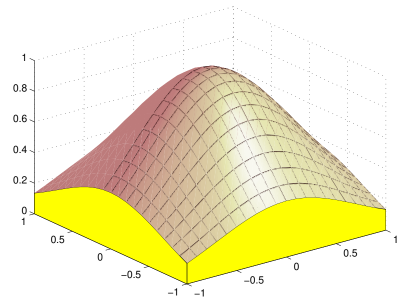
3. Zerlegung in Teilgebiete: Ist $B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2$ eine Nullmenge, so gilt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy \;+\; \int_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Rechenregeln und Eigenschaften (2)

4. Ist $m \le f(x,y) \le M$ für alle $(x,y) \in B$ und bezeichnet $F(B)$ den Flächeninhalt von B, so gilt

$$m \cdot F(B) \;\le\; \int_B f(x,y)\,dx\,dy \;\le\; M \cdot F(B).$$



5. Es sei B das Rechteck $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \le x \le b,\; c \le y \le d\}$ und f eine Funktion der Form $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Dann zerfällt das Integral in 2 Teile

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f_1(x) f_2(y)\,dy \right) dx \;=\; \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy.$$

20.2: Dreidimensionale Bereichsintegrale

Ein räumlicher Normalbereich in 3d hat die Form

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ und $\psi_1(x, y) \le \psi_2(x, y)$.

- Die Rollen der Variablen können wieder vertauscht sein, es gibt insgesamt 6 Formen für räumliche Normalbereiche, z. B. auch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le y \le b, \quad \varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y), \quad \psi_1(y, z) \le x \le \psi_2(y, z)\}$$

Beispiele

1. Quader $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a_1 \le x \le b_1, \quad a_2 \le y \le b_2, \quad a_3 \le z \le b_3\}$

2. Die Kugel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le R^2\}$$

besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} |z-z_0| &\le \sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}, \\ |y-y_0| &\le \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \\ |x-x_0| &\le R \end{aligned}$$

Es ergibt sich der Normalbereich

$$\begin{aligned} x_0 - R \ &\le\ x \ \le\ x_0 + R \\ y_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \ &\le\ y \ \le\ y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \\ z_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \ &\le\ z \ \le\ z_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \end{aligned}$$

Räumliche Bereichsintegrale

Auf einem räumlichen Normalbereich B zerfällt das Bereichsintegral in 3 eindimensionale Integrationen

$$\int\limits_B f(x,y,z)\,dV = \int\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \quad .$$

- Dabei bezeichnet $dV = dx\,dy\,dz$ das Volumenelement
- Für $f \equiv 1$ liefert das Bereichsintegral das Volumen von B
- Die obigen Rechenregeln gelten auch für räumliche Bereichsintegrale

Anwendung: Masse und Schwerpunkt von Körpern

Es sei B ein **Körper mit der Dichte** $\varrho(x, y, z)$.

- Die Masse m dieses Körpers ist gegeben durch

$$m = \int_B \varrho(x, y, z)\, dV = \int_B \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Die Koordinaten des Massenschwerpunktes $S = (x_s, y_s, z_s)$ erhält man durch die Integrale

$$x_s = \frac{1}{m} \int_B x \cdot \varrho(x, y, z)\, dV \quad ,$$

$$y_s = \frac{1}{m} \int_B y \cdot \varrho(x, y, z)\, dV \quad ,$$

$$z_s = \frac{1}{m} \int_B z \cdot \varrho(x, y, z)\, dV \quad .$$

20.3: Substitutionsregel

Nicht jede Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ kann als Normalbereich dargestellt werden

- Bereichsintegrale $\int_B f \, dF$ können auf einen (einfachen) Normalbereich, z.B. ein Rechteck, tranformiert werden

- **Wiederholung** Substitutionsformel in 1d: Sei

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b] \quad \text{mit } \varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Funktionaldeterminante

Sei γ eine stetig diff'bare und bijektive Abbildungen von einem Normalbereich B_{uv} auf B

$$\gamma : B_{uv} \to B, \quad \gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

- Jacobi (Funktional-)Matrix

$$D\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} .$$

- Funktionaldeterminante von $\gamma(u,v)$

$$\det\left(D\gamma(u,v)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}$$

Substitutionsregel

Zwischen den Flächenelementen besteht der Zusammenhang

$$dx\,dy \;=\; \left|\det\left(D\gamma(u,v)\right)\right| \cdot du\,dv,$$

d.h. der Betrag der Funktionaldeterminante misst die Flächenverzerrung.

Substitutionsregel: Für das Bereichsintegral gilt

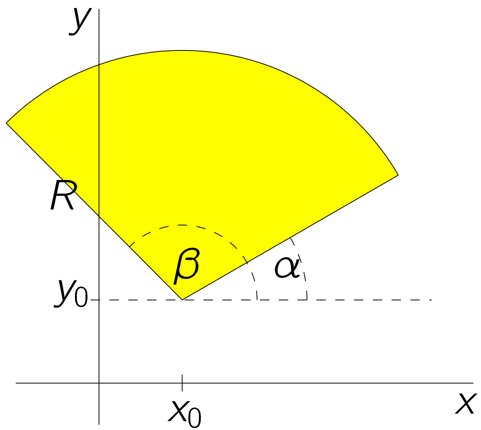
$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{B_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\det\left(D\gamma(u,v)\right)\right| du\,dv.$$

Beispiel Kreis/Kreisstück

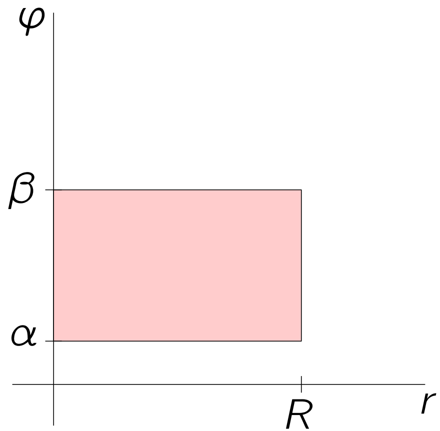
Eine Kreis (oder ein Kreisstück) mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r in kartesischen Koordinaten wird zu einer Rechteckfläche in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) + x_0, \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) + y_0. \end{aligned}$$

kartesische Koordinaten



Polarkoordinaten



Beispiel Kreis/Kreisstück (2)

Mit der Transformation $\gamma(r,\varphi) = (x_0 + r\cdot\cos(\varphi), y_0 + r\cdot\sin(\varphi))$ bilden wir ein Kreisstück K auf das Rechteck

$$K_{r\varphi} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ r_1 \leq r \leq r_2\}$$

ab.

- Funktionaldeterminante

$$\det(D\gamma(u,v)) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2(\varphi) + r\cdot\sin^2(\varphi) = r.$$

- Substitutionsregel

$$\int\limits_K f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{K_{r\varphi}} f(\gamma(r,\varphi))\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} f(\gamma(r,\varphi))\cdot r\,dr\right)d\varphi.$$

Anwendung: Ladung einer Platte

Es sei die Gesamtladung Q einer ebenen, kreisförmigen Platte B vom Radius R mit der Ladungsdichte $\sigma(x,y) = x^2 + y^2$ zu bestimmen.

Die Gesamtladung ist gegeben durch das Integral

$$\int_B \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_B (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

- Mit der obigen Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} Q &= \int_B (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))\cdot r\,dr\right)d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^3 dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{R^4}{4}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}R^4. \end{aligned}$$