Universität Konstanz

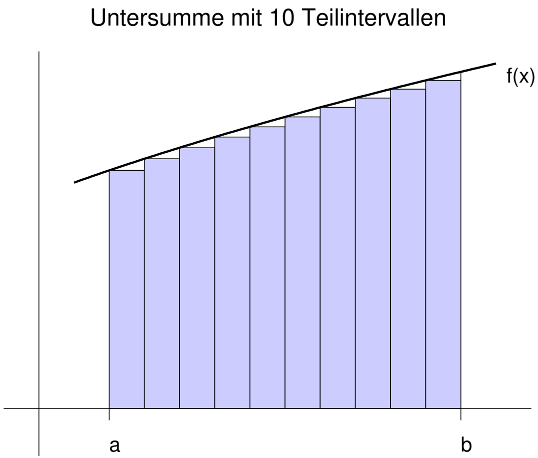
Mathematik II

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 11: Kurvenintegrale (Kap 19)

Dr. Stefan Frei, 13.07.2020

Wiederholung: Integration in 1d

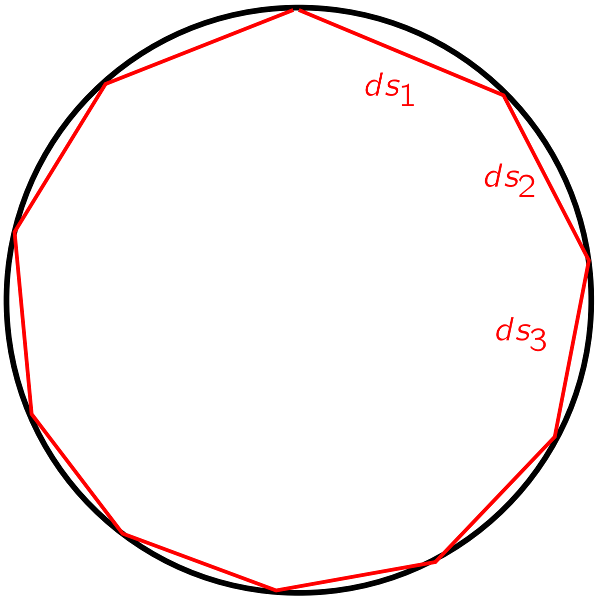


Approximation mit Riemann-Summen mit N Teilintervallen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} f(x_i)dx_i$$

und $N \to \infty$ ($dx \to 0$)

Beispiel: Berechnung der Länge einer Kurve



- Auch hier können wir die Länge einer Kurve C durch die Länge der Teilstücke ds_i, $i = 1, \ldots, N$ approximieren
- Je feiner wir unterteilen ($N \to \infty$), desto näher kommen wir der Länge

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} ds_i \right) = l(C)$$

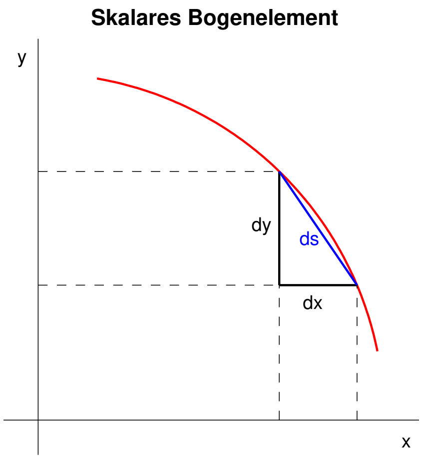
- Wir definieren das Kurvenintegral

$$\int_C ds := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} ds_i \right).$$

Skalares Bogenelement (Länge ds_i)

Es sei C ein (differenzierbare) Kurve in der Ebene mit der Parametrisierung

$$r \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}^2, \ r(t) \ = \ (x(t), y(t)) \quad \text{und der Ableitung} \quad r'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad .$$



Für die Länge eines infinitesimal kleinen Elements ds gilt ($\frac{dx}{dt} = x'(t)$)

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{(x'(t)\,dt)^2 + (y'(t)\,dt)^2} \\ &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \\ &= \|r'(t)\|\,dt. \end{aligned}$$

ds wird als skalares Bogenelement bezeichnet.

Länge einer Kurve

Allgemein gilt: Die Länge der Kurve C im $\mathbb{R}^n$ mit der Parametrisierung

$$r \; : \; [a,b] \to \mathbb{R}^n, \; r(t) \; = \; (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

ist gegeben durch

$$l(C) \; = \; \int_C ds \; = \; \int_a^b \|r'(t)\| \cdot dt \; = \; \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

Beispiel 1: Umfang eines Kreises

Der Kreis um den Ursprung mit Radius R besitzt die Parametrisierung (vgl. Polarkoordinaten)

$$C \ : \ r(\varphi) \ = \ (x_1(\varphi), x_2(\varphi)) \ = \ (R \cdot \cos(\varphi), \ R \cdot \sin(\varphi)) \ , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad .$$

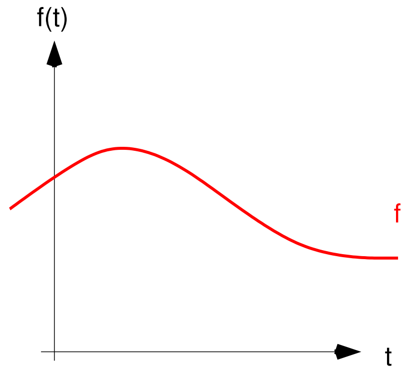
Somit ergibt sich für den Umfang (= Länge von C)

$$\begin{aligned} l(C) \ &= \ \int_C ds \ = \ \int_0^{2\pi} \|r(\varphi)\| \, dt \ = \ \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(\varphi) + R^2 \cos^2(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \ \int_0^{2\pi} R \, d\varphi \ = \ 2\pi R. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Bogenlänge des Graphen einer Funktion

Der Graph einer Funktion

$$f \;:\; [a,b] \to \mathbb{R},\;\; t \to f(t)$$



liefert eine Kurve C mit der Parametrisierung

$$r \;:\; [a,b] \to \mathbb{R}^2,\;\; r(t) \;=\; (t, f(t)).$$

Für die Kurvenlänge ergibt sich

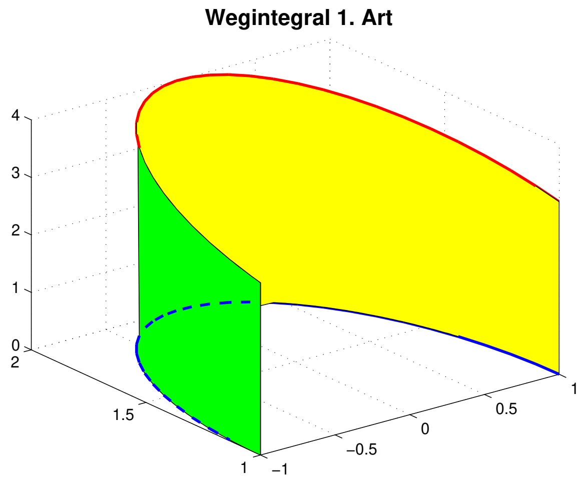
$$l(C) \;=\; \int_C ds \;=\; \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt.$$

Beispiel: $f \;:\; [1,3] \to \mathbb{R}\,,\;\; f(t) = \frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3}$. Es gilt $f'(t) = \sqrt{t-1}$ und damit

$$l(C) \;=\; \int_1^3 \sqrt{1+(\sqrt{t-1})^2}\, dt \;=\; \int_1^3 \sqrt{t}\, dt \;=\; \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 \;=\; \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right) \;=\; 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}.$$

Kurvenintegrale (Wegintegrale) 1. Art

Wir berechnen die Mantelfläche M, die eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ über einer Kurve C mit Parametrisierung $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$ .erzeugt



Die Mantelfläche ist gegeben durch das Kurvenintegral 1. Art

$$\begin{aligned} M &= \int_C f(x, y)\, ds \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \|r'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \,. \end{aligned}$$

Beispiel Kurvenintegral 1.Art

Es sei C der Halbkreis

$$r \,:\, [-\pi, 0] \to \mathbb{R}^2\,,\;\; r(t) = (\cos(t), 1 + \sin(t))$$

und $f(x, y) = 2 - y$.

Dann gilt

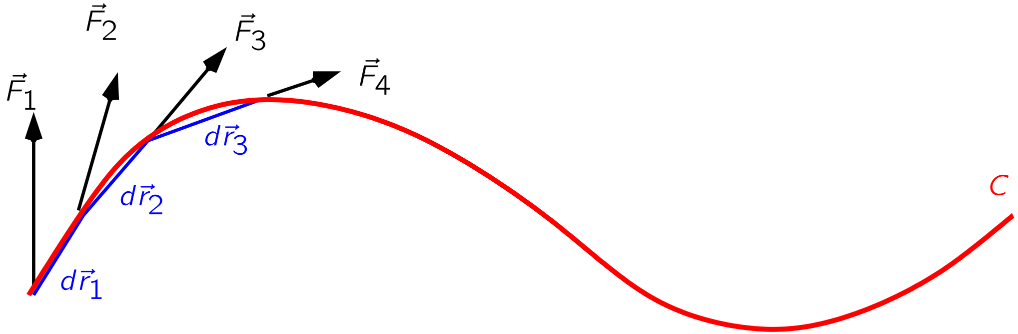
$$\|r'(t)\| \;=\; \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \;=\; \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \;=\; 1$$

und für die Mantelfläche

$$\begin{aligned} M \;&=\; \int_C (2 - y)\, ds \;=\; \int_{-\pi}^{0} (2 - (1 + \sin(t)))\, dt \;=\; \int_{-\pi}^{0} dt - \int_{-\pi}^{0} \sin(t)\, dt \\ &=\; \pi + 2 \approx 5.14. \end{aligned}$$

19.2: Kurvenintegrale 2.Art

Beispiel: Ein Körper wird entlang einer Kurve C durch ein Kraftfeld $\vec{F}$ bewegt



- Ist C eine Gerade ($d\vec{r}$ konstant) und die Kraft $\vec{F}$ konstant, so wird folgende Arbeit geleistet (Physikunterricht)

$$W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Im allgemeinen Fall ist eine Approximation an die Gesamtarbeit gegeben durch

$$W_{\text{tot}} \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

- Machen wir die Unterteilung “unendlich fein“ ($N \to \infty$), so ergibt sich das

Kurvenintegrale 2.Art

Allgemein: Es sei

- C eine (differenzierbare) Kurve mit Parametrisierung
$$r \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}^n \,, \ \ r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$
- $\vec{F}(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n))$ ein stetiges Vektorfeld

Für das vektorielle Bogenelement $d\vec{r}$ gilt
$$d\vec{r} \ = \ (dx_1, \ldots, dx_n) \ = \ (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \ dt \ = \ r'(t)\, dt$$

Das Kurvenintegral 2.Art lässt sich berechnen als
$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(r)\, d\vec{r} \ &= \ \int_C f_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ + \ \cdots \ + \ f_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \\ &= \ \int_a^b [f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_1'(t) \ + \ \cdots \ + \ f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t))\, x_n'(t)] \ dt \end{aligned}$$

Beispiel 1

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\;\; F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (2xy - y, 4x^2 - y).$$

und die Kurve C_1 mit der Parametrisierung

$$r \;:\; [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\;\; r(t) = (x(t), y(t)) \;=\; (t, t^2).$$

Es gilt für das Kurvenintegral 2. Art

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} F(r)\,dr \;&=\; \int_{C_1} (2xy - y)\,dx \;+\; (4x^2 - y)\,dy \\
&=\; \int_0^1 \left[(2x(t)y(t) - y(t))\cdot x'(t) \;+\; (4x(t)^2 - y(t))\cdot y'(t)\right]\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left[(2t\cdot t^2 - t^2)\cdot 1 \;+\; (4t^2 - t^2)\cdot 2t\right]\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left[8t^3 - t^2\right]\,dt \;=\; \left[2t^4 - \tfrac{t^3}{3}\right]_0^1 \;=\; \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir integrieren nun dasselbe Vektorfeld $\vec{F}$ über die Verbindungsgerade $\bar{r}$ der Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ (mit selben Anfangs- und Endpunkten)

$$\bar{r} \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,,\; \bar{r}(t) \;=\; (t,t)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} F(\bar{r})\, d\bar{r} \;&=\; \int_{C_2} (2xy - y)\, dx \,+\, (4x^2 - y)\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(2x(t)y(t) - y(t))\cdot x'(t) \,+\, (4x(t)^2 - y(t))\cdot y'(t)\right]\, dt \\
&= \int_0^1 \left[(2t\cdot t - t)\cdot 1 \,+\, (4t^2 - t)\cdot 1\right]\, dt \\
&= \int_0^1 \left(6t^2 - 2t\right)\, dt \;=\; \left[2t^3 - t^2\right]_0^1 \;=\; 1 \neq \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral hängt im Allg. also vom Weg zwischen Anfangs- und Endpunkt ab.

Rechenregeln für Kurvenintegrale

- Es seien F und G zwei Vektorfelder (der gleichen Größe), $\lambda \in \mathbb{R}$ und C eine differenzierbare Kurve. Dann gilt (Linearität)

$$\int_C (F(r) + G(r))\, dr \;=\; \int_C F(r)\, dr \;+\; \int_C G(r)\, dr,$$

$$\int_C \lambda \cdot F(r)\, dr \;=\; \lambda \cdot \int_C F(r)\, dr.$$

- Es sei $C = C_1 + C_2$ (mit Endpunkt von C_1 = Anfangspunkt von C_2) und $-C$ die Kurve, welche C in umgekehrter Richtung durchläuft. Dann gelten

$$\int_C F(r)\, dr \;=\; \int_{C_1} F(r)\, dr \;+\; \int_{C_2} F(r)\, dr,$$

$$\int_{-C} F(r)\, dr \;=\; -\int_C F(r)\, dr.$$

Potential (Stammfunktion) eines Vektorfeldes

Definition: Ein Vektorfeld

$$F \, : \, D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \, , \;\; F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

heißt konservativ oder ein Gradientenfeld, falls es eine Funktion

$$H \, : \, D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\; \text{mit} \; \nabla H(x_1, \ldots, x_n) \; = \; F(x_1, \ldots, x_n)$$

gibt. Die Funktion H wird dann als Potential oder als Stammfunktion von F bezeichnet.

Mann kann zeigen: Ein stetig differenzierbares Vektorfeld F ist genau dann konservativ, wenn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n \, .$$

Berechnung über Potentiale

Besitzt F ein Potential H (über einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$), so gilt

$$\int\limits_C F(r)\, dr \;=\; H(r(b)) \;-\; H(r(a)).$$

mit einer Parametrisierung r von C (vgl. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Folgerungen:

- Bei einem konservativen Vektorfeld hängt das Wegintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Für 2 Wege C_1, C_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt

$$\int_{C_1} F(r)\, dr \;=\; \int_{C_2} F(r)\, dr \qquad \text{(Wegunabhängigkeit)}.$$

- Für eine geschlossene Kurve C (Anfangs- = Endpunkt) gilt

$$\oint_C F(r)\, dr \;=\; 0.$$

Beispiel: Geschlossene Kurve

Gegeben seien die (geschlossene) Kreiskurve C mit der Parametrisierung

$$r \; : \; [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \, , \; r(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

und das Vektorfeld

$$F(x, y) \; = \; (f_1(x, y), f_2(x, y)) \; = \; (x^2 + y\, , y^2 + x) \quad .$$

- Wegen $\dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \; = \; 1 \; = \; \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial x}$ ist dieses Vektorfeld konservativ.
- Damit folgt sofort, dass

$$\int_C F(r)\, dr \; = \; \int_C (x^2 + y)\, dx \; + \; (x + y^2)\, dy = \; 0.$$

Bestimmung einer Potentialfunktion

Es sei $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ ein konservatives Vektorfeld.

- Für die Potentialfunktion (Stammfunktion) $H(x, y)$ muss gelten

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int f_1(x, y)\, dx \ + \ c_1(y) \\ &= \int f_2(x, y)\, dy \ + \ c_2(x) \end{aligned}$$

- Durch Gleichsetzen der beiden Zeilen versucht man nun die Funktionen $c_1(y)$ und $c_2(x)$ zu bestimmen.

Beispiel: Bestimmung einer Potentialfunktion

Die Funktion $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x^2 + y, x + y^2)$ ist konservativ (siehe oben).

- **Ansatz**:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \int f_1(x,y)\,dx + c_1(y) = \int (x^2 + y)\,dx + c_1(y) = \tfrac{1}{3}x^3 + xy + c_1(y) \\ &= \int f_2(x,y)\,dy + c_2(x) = \int (x + y^2)\,dy + c_2(x) = \tfrac{1}{3}y^3 + xy + c_2(x). \end{aligned}$$

- **Gleichsetzen** ergibt

$$c_1(y) = \tfrac{1}{3}y^3 \quad \text{und} \quad c_2(x) = \tfrac{1}{3}x^3.$$

- Wir erhalten des Potential

$$H(x,y) = \tfrac{1}{3}x^3 + xy + \tfrac{1}{3}y^3.$$

- Schließlich empfiehlt sich eine Probe!

Beispiel Berechnen von Kurvenintegralen mit Potentialen

Wir berechnen das Kurvenintegral

$$\int_C F(r)\, dr$$

für das obige konservative Vektorfeld $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (x^2 + y, x + y^2)$ mit Potential $H(x, y) \; = \; \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$.

- Die Kurve C sei gegeben durch die Parametrisierung

$$r \; : \; [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \, , \; r(t) = (t, t^2) \; .$$

- Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_C F(r)\, dr \; &= \; H(r(1)) - H(r(0)) \; = \; H(1, 1) - H(0, 0) \\ &= \; \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - 0 \; = \; \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Klausuren

- Klausurtermine
  - **Haupttermin**: Do, 30.07.2020, 14:30 - 16.30 Uhr, Sporthalle
  - **Nachtermin**: Di, 06.10.2020, 08:30 - 10:30 Uhr, R 512, R 712
- Anmeldung über Zeus (bei Problemen an Frau Barjasic)
- Klausurinfos auf Ilias (werden ständig aktualisiert)

- Inhalt: Stoff der Vorlesungen und Übungen
- Vorbereitung: Altklausuren, Übungszettel, wichtige Begriffe und Zusammenhänge
- Einzige Hilfsmittel: Beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt und (zusätzlich) Spickzettel aus der Mathe I