



Mathematik II

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 2: Lineare Differentialgleichungen

Dr. Stefan Frei, 27.04.2020

12.4.1 Homogene lineare Differentialgleichung

Eine **homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung** hat die Form

$$\dot{x} = h(t) \cdot x \quad (\text{inhomogen : } \dot{x} = h(t) \cdot x + k(t)).$$

- Spezialfall einer Differentialgleichung **mit getrennten Variablen** ($g(x) = x$)
- **Lösung**

$$\frac{dx}{dt} = h(t)x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \int h(t) dt$$

Mit einer Stammfunktion $H(t)$ zu $h(t)$ gilt

$$\ln(|x|) + c_1 = H(t) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \ln(|x|) = H(t) + c_3$$

- **Allgemeine Lösung** mit $c \in \mathbb{R}$

$$|x(t)| = \exp(H(t) + c_3) = c \cdot \exp(H(t)) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \pm c \cdot \exp(H(t))$$

Da c beide VZ haben kann, sind alle Lösungen von der Form $x(t) = c \exp(H(t))$.

Homogene AWA

Allgemeine Lösung

$$x(t) = c \exp(H(t))$$

- Durch Vorgabe einer **Anfangsbedingung** wird die Konstante c eindeutig bestimmt (Satz von Picard-Lindelöf).
- Lösungsansatz **Separation der Variablen** liefert diese Lösung, wenn Stammfunktion H bekannt.

Beispiel Homogene Dgl

Wir betrachten die AWA

$$(t^2 + 1)\dot{x} + 2tx = 0, \quad x(1) = 2.$$

Diese bringt man zunächst auf die Standardform

$$\dot{x} = -\frac{2t}{t^2 + 1} \cdot x.$$

Als Stammfunktion zu

$$h(t) = -\frac{2t}{t^2 + 1}$$

finden wir $H(t) = -\ln(t^2 + 1)$. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung

$$x(t) = c \cdot \exp(H(t)) = c \cdot \exp(-\ln(t^2 + 1)) = \frac{c}{\exp(\ln(t^2 + 1))} = \frac{c}{t^2 + 1}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel Homogene Dgl (2)

- Allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{c}{t^2 + 1}$$

- Anfangsbedingung zur Bestimmung der Konstante c

$$2 = x(1) = \frac{c}{1 + 1} = \frac{c}{2}, \quad \text{also } c = 4.$$

Damit ist

$$x(t) = \frac{4}{t^2 + 1}$$

die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe.

- Probe:

$$\dot{x}(t) = \frac{-4 \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = -\frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{4}{t^2 + 1} = -\frac{2t}{t^2 + 1} \cdot x(t).$$

12.4.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Eine **inhomogene lineare Differentialgleichung (1. Ordnung)** hat die Form

$$\dot{x} = h(t) \cdot x + k(t). \quad (1)$$

- Eindeutige Lösbarkeit (einer AWA), wenn $h(t)$, $k(t)$ stetig
- Zur **Erinnerung**: Die **homogene** Dgl hat die Lösung

$$x(t) = c \cdot \exp(H(t)) ,$$

mit einer Stammfunktion $H(t)$ von $h(t)$.

- **Lösungsansatz**: **Variation der Konstanten**

$$x(t) = c(t) \cdot \exp(H(t)) .$$

mit einer (zu bestimmenden) Funktion $c(t)$.

Variation der Konstanten

Lösungsansatz: Variation der Konstanten $x(t) = c(t) \cdot \exp(H(t))$.

- Bedingung für $c(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{c}(t) \cdot \exp(H(t)) + c(t) \cdot \exp(H(t)) \cdot H'(t) \\ &= \underbrace{\dot{c}(t) \cdot \exp(H(t))}_{\stackrel{!}{=} k(t)} + \underbrace{c(t) \cdot \exp(H(t))}_{=x(t)} \cdot h(t) \quad .\end{aligned}$$

- Somit erhalten wir die Bedingung

$$\dot{c}(t) = k(t) \cdot \exp(-H(t)) \quad \Rightarrow \quad c(t) = \int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt \quad (\text{Stammfunktion}).$$

- **Ergebnis:** Die allgemeine Lösung von (1) hat die Form

$$x(t) = \left[\int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt \right] \cdot \exp(H(t)).$$

- In dem unbestimmten Integral steckt noch eine Konstante $d \in \mathbb{R}$. Durch Vorgabe einer **Anfangsbedingung** wird d eindeutig bestimmt.

Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung

$$x(t) = \left[\int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt \right] \cdot \exp(H(t)).$$

- Ansatz funktioniert für lineare inhomogene Dgl immer, wenn eine Stammfunktion $H(t)$ zu $h(t)$ bekannt
- Probe:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [k(t) \cdot \exp(-H(t))] \cdot \exp(H(t)) + \underbrace{\left[\int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt \right] \cdot \exp(H(t))}_{=x(t)} h(t) \\ &= k(t) + x(t)h(t) \end{aligned}$$

Beispiel inhomogene lineare Dgl

Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = - \underbrace{\frac{2t}{t^2+1}}_{=h(t)} \cdot x + \underbrace{t^2}_{=k(t)}, \quad x(1) = 2. \quad (2)$$

- **Ansatz** (mit einer Stammfunktion $H(t)$ zu $h(t)$)

$$x(t) = c(t) \cdot \exp(H(t))$$

Wir erhalten wie oben

$$c(t) = \int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt$$

- Hier haben wir $H(t) = -\ln(t^2+1)$, $k(t) = t^2$ und damit

$$\exp(H(t)) = \exp(-\ln(t^2+1)) = \frac{1}{t^2+1}, \quad \exp(-H(t)) = \exp(\ln(t^2+1)) = t^2+1.$$

Beispiel inhomogene lineare Dgl (2)

- **Allgemeine Lösung**

$$\begin{aligned}x(t) &= \left[\int k(t) \cdot \exp(-H(t)) dt \right] \cdot \exp(H(t)) \\&= \left[\int t^2 \cdot (t^2 + 1) dt \right] \cdot \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + d}{t^2 + 1} \quad (d \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

- **Probe**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{(t^4 + t^2)(t^2 + 1) - 2t \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + d \right)}{(t^2 + 1)^2} \\&= \frac{t^2(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^2} - \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + d}{t^2 + 1} = t^2 - \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot x(t) \quad .\end{aligned}$$

Beispiel inhomogene lineare Dgl (3)

- **Allgemeine Lösung**

$$x(t) = \frac{\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + d}{t^2 + 1}$$

- **Anfangsbedingung**

$$2 = x(1) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + d}{2} \Rightarrow d = \frac{52}{15}$$

Somit ist

$$x(t) = \frac{\frac{52}{15} + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3}{t^2 + 1} = \frac{52 + 3t^5 + 5t^3}{15t^2 + 15}$$