Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 2: Lineare Differentialgleichungen (Teil 2)

Dr. Stefan Frei, 27.04.2020

12.4.3 Lineare Differentialgleichungen 2.Ordnung

Eine **homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)** hat die Form

$$\ddot{x} \;+\; a\dot{x} + bx \;=\; 0 \qquad \text{mit Konstanten } a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

- Lösungsmethode mittels der charakteristischen Gleichung

  $$P(r) = r^2 + ar + b \;=\; 0,$$

  Das charakteristische Polynom $P(r)$ ist quadratisch in r und hängt von den Koeffizienten a, b der Dgl ab.

- Für die allgemeine Lösung von (1) sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms wichtig.

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom hat zwei Nullstellen $p, q \in \mathbb{C}$:

$$r^2 + ar + b = (r-p)(r-q).$$

Fall 1: Die Nullstellen sind einfach: $p \neq q$ (p und q sind entweder reell oder komplex konjugiert zueinander)

- Dann hat die **allgemeine Lösung** von (1) die Form

  $$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot \exp(qt)$$

  mit beliebigen $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$.

Fall 2: Das charakteristische Polynom hat eine doppelte Nullstelle (diese muss reell sein):

$$r^2 + ar + b = (r-p)^2 \qquad \text{mit } p \in \mathbb{R}\,.$$

Dann hat die **allgemeine Lösung** von (1) die Form

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot t \cdot \exp(pt)$$

mit beliebigen $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Einfache Nullstellen

Bei einfachen Nullstellen p, q löst die Funktion

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot \exp(qt)$$

für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$.

- **Beweis** (Probe):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= p \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + q \cdot c_2 \cdot \exp(qt), \\ \ddot{x}(t) &= p^2 \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + q^2 \cdot c_2 \cdot \exp(qt), \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) &= p^2 \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + q^2 \cdot c_2 \cdot \exp(qt) \\ &\quad + a \cdot p \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + a \cdot q \cdot c_2 \cdot \exp(qt) \\ &\quad + b \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + b \cdot c_2 \cdot \exp(qt) \\ &= (p^2 + ap + b) \cdot c_1 \cdot \exp(pt) + (q^2 + aq + b) \cdot c_2 \cdot \exp(qt) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Einfache Nullstellen (2)

Lösung

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot \exp(qt), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Wir interessieren uns nur für die reellen Lösungen $x(t) \in \mathbb{R}$.

- **Fall (a)**: p und q sind reell. Die reellen Lösungen sind gegeben durch

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot \exp(qt), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einfache komplex konjugierte Nullstellen

- **Fall (b)**: p und q sind komplex konjugiert

$$p = \alpha + \beta i, \quad q = \alpha - \beta i.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cdot \exp(\alpha t + i\beta t) + c_2 \cdot \exp(\alpha t - i\beta t) \\ &= \exp(\alpha t)\big(c_1 \exp(i\beta t) + c_2 \exp(-i\beta t)\big) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \exp(i\beta t) &= \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ \exp(-i\beta t) &= \cos(-\beta t) + i\sin(-\beta t) = \cos(\beta t) - i\sin(\beta t) \end{aligned}$$

folgt (für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$)

$$x(t) = \exp(\alpha t)\big(\cos(\beta t)\underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:d_1} + \sin(\beta t)\underbrace{i(c_1 - c_2)}_{=:d_2}\big)$$

Allgemeine reelle Lösung:

$$x(t) = d_1 \cdot \exp(\alpha t) \cdot \cos(\beta t) + d_2 \cdot \exp(\alpha t) \cdot \sin(\beta t), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

Doppelte Nullstellen

Bei einer doppelten Nullstellen p des charakteristischen Polynoms löst die Funktion

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(pt) + c_2 \cdot t \cdot \exp(pt)$$

mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$.

Probe: Übung (es gilt $p = -2a$)

Anfangsbedingungen

Für die Eindeutigkeit der Lösung brauchen wir hier 2 Anfangsbedingungen:

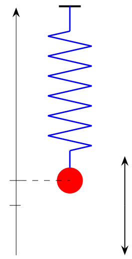
$$x(t_0) \;=\; x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t_0) \;=\; x_1, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Damit existieren in allen Fällen eindeutige reelle Lösungen zu

$$\ddot{x} \;+\; a\dot{x} + bx \;=\; 0, \qquad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1.$$

Beispiel Federpendel

Federpendel mit der Masse $m = 1$ und der Federkonstanten $k = 2$



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2x = 0.$$

- Charakteristische Gleichung: $r^2 + 2 = 0$
- Nullstellen $p = \sqrt{2}\, i$ und $q = -\sqrt{2}\, i$ (Fall 1b, $\alpha = 0, \beta = \sqrt{2}$).

- Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cdot \exp(\alpha t) \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \exp(\alpha t) \cdot \sin(\beta t) \\ &= c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{2}\, t\right) \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel Federpendel (2)

Allgemeine Lösung

$$x(t) \;=\; c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{2}\,t\right) \;+\; c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

- Zusätzlich Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$
- Dann folgt

$$1 \;=\; x(0) = c_1 \cdot \cos(0) \;+\; c_2 \cdot \sin(0) \;=\; c_1\,,$$

$$2 \;=\; \dot{x}(0) \;=\; -\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot \sin(0) + \sqrt{2} \cdot c_2 \cdot \cos(0) \;=\; \sqrt{2} \cdot c_2 \quad \Rightarrow c_2 = \sqrt{2}.$$

- Damit ist

$$x(t) \;=\; \cos\left(\sqrt{2}\,t\right) \;+\; \sqrt{2} \cdot \sin\left(\sqrt{2}\,t\right)$$

die eindeutige Lösung von

$$\ddot{x} + 2x \;=\; 0\,, \quad x(0) \;=\; 1\,,\; \dot{x}(0) \;=\; 2.$$

Beispiel 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

- Charakteristische Gleichung $r^2 + 2r - 3 = 0$
- Nullstellen $p = 1$ und $q = -3$ (Fall 1a)

- Allgemeine Lösung

$$x(t) \;=\; c_1 \cdot e^{t} \;+\; c_2 \cdot e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 3

Als letztes Beispiel betrachten wir noch

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x \;=\; 0, \quad x(0) = 1,\, \dot{x}(0) = 0.$$

- Charakteristische Gleichung $r^2 - 4r + 4 = 0$
- Doppelte Nullstelle $p = 2 \quad (r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2)$
- Allgemeine Lösung

$$x(t) \;=\; c_1 \cdot e^{2t} \;+\; c_2 \cdot t \cdot e^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

- Anfangsbedingung $(\dot{x}(t) = 2c_1 e^{2t} + (2t+1)c_2 e^{2t})$

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = c_1 \\ 0 &= \dot{x}(0) = 2c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -2 \end{aligned}$$

- Eindeutige Lösung: $x(t) = e^{2t} - 2te^{2t} = (1-2t)e^{2t}$

Erweiterungen

- Die Konstanten a bzw. b werden durch Funktionen $a(t)$ bzw. $b(t)$ ersetzt:
$$\ddot{x} + a(t)\cdot\dot{x} + b(t)\cdot x = 0.$$
- Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung:
$$\ddot{x} + a\cdot\dot{x} + b\cdot x = k(t).$$
- Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (Lösung mit charakteristischer Gleichung):
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0.$$
- Differentialgleichungen mit Ableitungen in einer Variablen heißen gewöhnliche Differentialgleichungen
- Partielle Differentialgleichungen: Es gehen mehrere partielle Ableitungen ein, z.B. Wärmeleitungsgleichung
$$\partial_t T(x,t) = \partial_x^2 T(x,t)$$