



Mathematik II

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 3: Matrizen

Dr. Stefan Frei, 04.05.2020

13 Matrizen

- Große Teile dieses Kapitels sind elementar, einiges (wahrscheinlich) aus der Schule bekannt
- **Arbeitsanweisung** für Teil 1: Lesen Sie [Kap. 13 im Skript bis einschließlich 13.3.3](#)
- Matrix $A \in K^{m \times n}$, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Im folgenden finden Sie Fragen zu den wichtigsten Begriffen und Inhalten des Kapitels

13.1 Matrizen und Vektoren

Matrix $A \in K^{m \times n}$, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wichtige Begriffe:

- Quadratische Matrix
- Diagonalmatrix, Einheitsmatrix, obere bzw. untere Dreiecksmatrix
- Transponierte Matrix A^T , konjugiert-komplexe Matrix A^* , adjungierte Matrix A^+
- Spur einer Matrix

Rechenregeln

Überprüfen Sie die folgenden Rechenregeln anhand von (selbstgewählten) Matrizen $A, B \in K^{2 \times 2}$, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und anhand der allgemeinen 2×2 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Eigenschaften der **Spur**:

$$\begin{aligned} \text{trace}(A^T) &= \text{trace}(A) \quad , \\ \text{trace}(A^+) &= \text{trace}(A^*) = \overline{\text{trace}(A)}. \end{aligned}$$

- Addition** und **Skalarmultiplikation** ($\lambda \in K$)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \quad , \\ (A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (A + B)^+ &= A^+ + B^+. \end{aligned}$$

13.2 Produkt von Matrizen

- Was ist die Beziehung von **Skalarprodukt** $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ und der **euklidischen Norm** $\|\vec{v}\|$ zu Matrix- (bzw. Vektor-)multiplikation?
- Ist die Matrixmultiplikation **kommutativ**? Überprüfen Sie Ihre Antwort anhand der oben gegebenen allgemeinen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, siehe (1).
- Überprüfen Sie die Rechenregeln in 13.2.4 (**Assoziativität**, **Distributivgesetz** und die Regeln für das **Transponieren** und **Adjungieren**) anhand von selbstgewählten 2×2 -Matrizen sowie für allgemeine Matrizen $A, B \in K^{2 \times 2}$.

13.3 Spezielle Matrizen

Machen Sie sich mit folgenden Begriffen vertraut und geben Sie jeweils ein weiteres Beispiel einer Matrix mit der genannten Eigenschaft an

- **Symmetrische** und **schief-symmetrische** Matrizen ($A^T = A$ bzw. $A^T = -A$)
- **Hermiteische** und **schief-hermitesche** Matrizen ($A^+ = A$ bzw. $A^+ = -A$)
(Verallgemeinerung der Symmetrie für komplexe Matrizen)
- **Orthogonale** Matrizen $A^T A = I$ (Die Spaltenvektoren sind orthogonal zueinander)
- **Unitäre** Matrizen $A^+ A = I$ (Verallgemeinerung der Orthogonalität für komplexe Matrizen)
- **Normale** Matrizen ($A^+ A = A A^+$): Darunter fallen alle reell-symmetrischen, hermiteschen, reell-orthogonalen und unitären Matrizen (*Überlegen Sie sich, warum*)