Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 3: Matrizen (Teil 2)

Dr. Stefan Frei, 27.04.2020

13.3.4 Invertierbare Matrizen

Die $n \times n$-Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine (ebenfalls $n \times n$-) Matrix D gibt mit

$$DA = I = AD.$$

Man nennt dann D die zu A inverse Matrix und schreibt dafür $A^{-1} = D$.

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist nicht invertierbar.}$$

Invertierbare Matrizen

- Nicht jede Matrix ist invertierbar
- Man überlege sich, warum die folgenden Rechenregeln gelten

$$\begin{aligned} \left(A^{-1}\right)^{-1} &= A && \text{(d.h. es gilt } AA^{-1} = I\text{),} \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} && \text{(d.h. es gilt } (B^{-1}A^{-1})(AB) = I\text{).} \end{aligned}$$

- Wie sieht die Inverse einer Diagonalmatrix aus?

Rang einer $m \times n$-Matrix A

Definition:

1. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A heißt Spaltenrang von A.
2. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A heißt Zeilenrang von A.
3. Es gilt stets Zeilenrang = Spaltenrang. Man setzt $\text{rang}(A) =$ Zeilenrang von $A =$ Spaltenrang von A und nennt dies den Rang von A.

Beispiele:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Rang einer $m \times n$-Matrix

Definition: Eine quadratische $n \times n$-Matrix A heißt regulär, falls $\operatorname{rang}(A) = n$ gilt. Ansonsten heißt die Matrix singulär.

Es gilt

- $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$. (Es gibt nur m Zeilen- und n Spaltenvektoren)
- A regulär $\Leftrightarrow$ A invertierbar.

13.4 Matrizenumformungen

Eine elementare Zeilenumformung ist eine der folgenden drei Operationen:

1. Vertauschen von zwei Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$,
3. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Beispiele:

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (Z1 \leftrightarrow Z2)\ ,$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (-1 \cdot Z3)\ ,$$

3. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (Z3 - 2 \cdot Z2)\ .$$

Zeilenstufenform einer Matrix

- Jede $m \times n$-Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen auf eine Form gebracht werden, bei der unterhalb der "Diagonalen" Nullen stehen ($\rightarrow$ Zeilenstufenform einer Matrix)
- **Spaltenweise** Erzeugung der Zeilenstufenform $k = 1, \ldots, m$:
  - Ist $a_{kk} \neq 0$: Die Einträge unterhalb der Diagonale werden durch Addition eines geeigneten Vielfachen der k-ten Zeile zu Null gemacht.
  - Ist $a_{kk} = 0$, so wird vorher eine Zeilenvertauschung vorgenommen.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

- **Aufgabe**: Vertauschen Sie erst Zeile 1 und 3 und vergleichen Sie die Zeilenstufenform

Bestimmung des Ranges einer Matrix

Der Rang einer Matrix ist invariant gegenüber elementaren Zeilenumformungen

- Aus der Zeilenstufenform der Matrix kann der Rang der Matrix abgelesen werden

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Die rechte Matrix hat den Rang 3 $\Rightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = 3$
- $A \in K^{n \times n}$ ist regulär (A hat Vollrang), wenn in der Zeilenstufenform alle Diagonalelemente ungleich Null sind.