Universität Konstanz

Mathematik II

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 4: Lineare Gleichungssysteme (Kap 14)

Dr. Stefan Frei, 11.05.2020

Lineares Gleichungssystem

Allgemeines lineares Gleichungssystem der Größe $m \times n$:
Gesucht sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, so dass

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$.

Fälle:

- $n = m$ (Kap 14.1, n Bedingungen für n Variablen $\rightarrow$ unter bestimmten Voraussetzungen eindeutige Lösbarkeit)
- $m > n$: Überbestimmtes Gleichungssystem (Kap 14.3), im allgemeinen keine Lösbarkeit im strengen Sinne
- $m < n$: Unterbestimmtes Gleichungssystem. Wenn es Lösungen gibt, dann sind es unendlich viele

Darstellung mit Matrizen

LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich (1) darstellen als

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Gauß-Elimination ($n \times n$-LGS)

Startpunkt: Erweiterte Matrix

$$G = \left(A, \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \quad .$$

Wiederholung: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen von zwei Zeilen,
2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$,
3. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Wichtig: Elementare Zeilenumformungen verändern die Lösungsmenge des obigen Systems nicht!

Gauß-Elimination (2)

Die erweiterte Matrix G bringt man durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$(R, \vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & c_1 \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} & c_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} & c_n \end{array}\right) \quad .$$

Dann gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad R\vec{x} = \vec{c}$$

Gauß-Elimination (Vollrang)

Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccccccc}
r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n-1}x_{n-1} & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n-1}x_{n-1} & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & r_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & r_{n-1,n}x_n & = & c_{n-1} \\
 & & & & & & & & r_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

1. Fall: Die Matrix A hat Vollrang

- Es gilt $r_{jj} \neq 0$ für $j = 1, \ldots, n$ (siehe letzte Vorlesung)
- Es gibt genau eine Lösung. Berechnung durch Rückwärtseinsetzen:

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \qquad \ldots \qquad x_2 = \frac{c_2 - r_{23}x_3 - \cdots - r_{2n}x_n}{r_{22}}$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - r_{n-1,n}x_n}{r_{n-1,n-1}}, \qquad x_1 = \frac{c_1 - r_{12}x_2 - \cdots - r_{1n}x_n}{r_{11}}.$$

Gauß-Elimination (Singuläre Matrix)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n-1}x_{n-1} & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n-1}x_{n-1} & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & r_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & r_{n-1,n}x_n & = & c_{n-1} \\
 & & & & & & & & r_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

2. Fall: Die Matrix A ist singulär ($r_{nn} = 0$)

2a: Es gilt $c_n \neq 0$

- Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung
- Gleiches gilt, wenn mehrere Zeilen z_j Null ($j = s + 1, \ldots, n$) sind (rang(A)=s<n-1) und mindestens ein $c_j \neq 0$. Dann kann es auch keine Lösung geben.

Gauß-Elimination (Singuläre Matrix)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
r_{11}x_1 & + & r_{12}x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n-1}x_{n-1} & + & r_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & r_{22}x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n-1}x_{n-1} & + & r_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & r_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & r_{n-1,n}x_n & = & c_{n-1} \\
 & & & & & & & & r_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

2b: $\text{Rang}(A) = s < n$ und für alle Nullzeilen z_j $(j = s+1, \ldots, n)$ gilt $c_j = 0$.

- Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen
- Wir setzen $x_j = \lambda_j$ für $j = s+1, \ldots, n$. Dann lassen sich alle anderen Komponenten darstellen in der Form

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{1,s+1}\lambda_{s+1} + \ldots + \alpha_{1,n}\lambda_n \\
x_2 &= \alpha_{20} + \alpha_{2,s+1}\lambda_{s+1} + \ldots + \alpha_{2,n}\lambda_n \\
&\vdots \\
x_s &= \alpha_{s0} + \alpha_{s,s+1}\lambda_{s+1} + \ldots + \alpha_{s,n}\lambda_n
\end{aligned}$$

mit Zahlen α_{ij} und beliebigen $\lambda_{s+1}, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Lösungsmenge bei singulären Matrizen

Wir fassen die Koeffizienten α_{ij} in Vektoren $\vec{v}_i$ zusammen. Dann ist die Lösungsmenge X gegeben als

$$\begin{aligned} X :&= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \vec{x} = \vec{v}_0 + \lambda_{s+1}\vec{v}_{s+1} + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n, \text{ mit } \lambda_{s+1}, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \vec{v}_0 + \text{span}\left(\vec{v}_{s+1}, \ldots, \vec{v}_n\right) \end{aligned}$$

- **Zur Erinnerung**: $X_0 := \text{span}(\vec{v}_{s+1}, \ldots, \vec{v}_n)$ ist ein Unterraum der Dimension $n - s$ des $\mathbb{R}^n$
- Eine Menge der Form $X = \vec{v}_0 + X_0$ nennt man affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - s$.
- X setzt sich zusammen aus der Lösungsmenge X_0 des zugehörigen homogenen Systems (rechte Seite $b = 0$) und einer (beliebigen) Lösung $\vec{v}_0$ des inhomogenen Systems

Beispiel

- Matrix mit Vollrang: siehe Skriptum
- Singuläre Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & -3 & 19 \\ -6 & 1 & 50 & -35 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 10 & 35 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_3 = \lambda_3$. Rückwärtseinsetzen ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}(-1 - 7\lambda_3) = -0.5 - 3.5\lambda_3$$
$$x_1 = \frac{1}{2}(10 - 3x_2 + 5\lambda_3) = \frac{1}{2}(10 + 1.5 + 10.5\lambda_3 + 5\lambda_3) = 5.75 + 7.75\lambda_3$$

Die Lösungsmenge ist

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} 5.75 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7.75 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zusammenfassung LGS

Zusammengefasst gilt

- Ein $n \times n$-LGS ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A Vollrang hat (d.h. regulär/invertierbar ist)
- Dann gilt $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
- Ist A singulär, so gibt es entweder
  - Keine Lösung (Fall 2a)
  - Unendliche viele Lösungen (Fall 2b):

    Die Lösungsmenge X ist ein affiner Raum mit Dimension $n-$rang(A), die sich aus einer Lösung $\vec{v}_0$ des inhomogenen Systems plus der Lösungsmenge X_0 des homogenen Systems zusammensetzt

Berechnung der inversen Matrix

Die Gauß-Elimination kann auch zur Berechnung der inversen Matrix verwendet werden (Gauß-Jordan-Algorithmus):

- Wir suchen $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass
$$AA^{-1} = I$$
- Jede Spalte s_i von A^{-1} muss also
$$A\vec{s}_i = \vec{e}_i$$
mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_i$ erfüllen.
- Wir können die Berechnung aller $\vec{s}_i$ simultan durchführen
$$(A \,|\, \vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n)$$
Dies entspricht der $n \times 2n$-Matrix
$$(A \,|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$(A \,|\, I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

1. Wir bringen diese auf Zeilenstufenform

$$(R \,|\, C) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{11} & \cdots & r_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & r_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \quad .$$

- Die Inverse existiert genau dann, wenn $r_{nn} \neq 0$

Gauß-Jordan-Algorithmus (Teil 2)

2. Division durch die Diagonalelemente

$$(S \mid D) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1n} & d_{11} & \cdots & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & s_{n-1,n} & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & d_{n1} & \cdots & \cdots & d_{nn} \end{array}\right) .$$

3. Elimination der Einträge oberhalb der Diagonalen durch elementare Zeilenumformungen (beginnend mit der letzten Spalte)

$$(I \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) .$$

- In der rechten Matrix steht nun die gesuchte inverse Matrix A^{-1}.

Beispiel Gauß-Jordan-Algorithmus

1.)

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & A & & & I & \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -3 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{9}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1
\end{array}
$$

2.)-3.)

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\
\hline
 & I & & & A^{-1} &
\end{array}
$$

Schließlich empfiehlt sich eine Probe.