Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 5: Determinanten (Kap 15)

Dr. Stefan Frei, 18.05.2020

Determinante einer 2×2-Matrix

- **Allgemein**: Jeder quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ wird als Determinante eine Zahl aus K ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) zugewiesen.

- Wiederholung aus der Mathe I: Determinante einer 2×2-Matrix

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Bedeutung**: Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms
- 2 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$.
- Genau dann ist die Matrix A auch singulär.

Determinante einer 3×3-Matrix

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Berechnung und Bedeutung

- Regel von Sarrus
- Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spats
- Orientierung der Spaltenvektoren (Links-/Rechtssystem)
- 3 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 0$
- Genau dann ist die Matrix A auch singulär

Determinante einer $n \times n$-Matrix

Heute: Determinante einer allgemeinen $n \times n$-Matrix

Bedeutung im allgemeinen Fall:

- Regularität und Invertierbarkeit von Matrizen
- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren
- Berechnung von Eigenwerten (Kap. 17)

Definition über die Laplace-Entwicklung

Wir definieren die Determinante einer $n \times n$-Matrix **rekursiv** über die Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen:

- Zunächst sei dei Determinante einer 1×1-Matrix
$$\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$$

- Weiters bezeichne A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Laplace-Entwicklung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Entwicklung nach der j-ten Spalte: Für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

2. Entwicklung nach der i-ten Zeile: Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Beispiel 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det A_{1j} = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12})$$

Hier ist

$$A_{11} = a_{22}, \qquad A_{12} = a_{21}$$

Es ergibt sich die bekannte Formel

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Beispiel 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{1j}) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13})$$

Hier ist

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Beispiel einer 4×4-Matrix

Der Laplacesche Entwicklungssatz bietet sich zur **Berechnungen von Determinanten** von größeren Matrizen nur an, wenn diese Zeilen oder Spalten mit vielen Nullen enthalten.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{Vorzeichen: } \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Wir entwicklen nach der letzten Spalte $(\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+4} \cdot a_{i4} \cdot \det A_{i4})$ und erhalten

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(4-2) = -8 \quad .$$

Beispiel einer 4×4-Matrix (2)

Ungeschickt wäre hier die Entwicklung nach der 2. Zeile (deutlich größerer Rechenaufwand):

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \cdots$$

Definition mit Hilfe von Axiomen

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix}$$

mit den Spalten $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$ und den Zeilen $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ ist eine **Zahl**, die durch die folgenden vier Eigenschaften (Axiome) charakterisiert wird:

D1 $\det A^T = \det A$.

D2 Die Determinante einer Diagonalmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det D = \begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n = \prod_{i=1}^{n} d_i \quad .$$

Definition mit Hilfe von Axiomen

D3 $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist nicht regulär (A ist singulär),
($\Leftrightarrow$ die Spalten/Zeilen von A sind linear abhängig)

D4 $\det A$ ist als Funktion jeder (einzelnen) Zeile oder Spalte linear.

Dabei bedeutet linear in jeder einzelnen Spalte

$$\begin{aligned} \det(\dots, \lambda \cdot \vec{s}_j, \dots) &= \lambda \cdot \det(\dots, \vec{s}_j, \dots) \quad , \\ \det(\dots, \vec{s}_j + \vec{v}_j, \dots) &= \det(\dots, \vec{s}_j, \dots) + \det(\dots, \vec{v}_j, \dots) \end{aligned}$$

(entsprechend für die Zeilen).

- Beide Definitionen (Axiome und Laplace-Entwicklung) führen zum selben Ergebnis
- **D1**-**D4** sind daher Eigenschaften (Rechenregeln) der oben definieren Determinante

Beispiele

1. Diagonalmatrix (**D2**)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$$

2. Regularität (**D3**)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

   Die Spalten sind linear abhängig (ebenso die Zeilen): $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

Beispiele (2)

3. Linearität (**D4**)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Berechnung mit Hilfe von Gauß-Elimination

D2 (Diagonalmatrizen) kann man verallgemeinern: Auch bei oberen und unteren Dreiecksmatrizen ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Diese Form können wir durch Gauß-Elimination erreichen.

Elementare Zeilenumformungen

Wie beeinflussen elementare Zeilenumformungen die Determinante? Aus (**D4**) kann man folgern, dass

1. Die Matrix A_1 entstehe aus A durch Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile. Dann gilt
$$\det A_1 = -\det A.$$

2. Die Matrix A_2 entstehe aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$. Dann folgt
$$\det A_2 = \lambda \cdot \det A.$$

3. Die Matrix A_3 entstehe aus A durch Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile. Dann gilt
$$\det A_3 = \det A.$$

(**Vorsicht**: Wird auch die j-te Zeile mit einem Skalar λ_2 multipliziert, gilt wie in 2. $\det A_3 = \lambda_2 \cdot \det A$)

Beispiel

- Die Gauß-Elimination kann (nur) mit den Umformungen 1 und 3 durchgeführt werden
- Es ist dann nur die Anzahl der Zeilenvertauschungen zu zählen

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{eine Zeilenvertauschung}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =: B \quad .$$

Insgesamt haben wir eine Zeilenvertauschung verwendet. Damit ergibt sich

$$\det A = (-1)^1 \det B = -7.$$

Weitere Rechenregeln

1. Es sei A eine $n \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A.$$

Im Fall $n = 2$ erhält man beispielsweise

$$\det(\lambda \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 a_{11} a_{22} - \lambda^2 a_{12} a_{21} = \lambda^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda^2 \det A.$$

Beispiel ($n = 3$):

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 5^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -125 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -125 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 2) = -500.$$

Matrixmultiplikation

2. Für zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

3. Ist A invertierbar, so gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Das folgt direkt aus 2., denn

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}).$$

Dreiecksblockform

4. Besitzt A die Gestalt ('Dreiecks-Blockform')

$$
A = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & A_1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & A_2 & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right) ,
$$

so gilt

$$
\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 .
$$

Beispiel zur Dreiecksblockform

Beispiel: Determinante einer 7×7-Matrix

$$\det(A) = \left|\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \end{array}\right| \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2.$$