Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 6: Lineare Abbildungen (Kap 16)

Dr. Stefan Frei, 25.05.2020

Wiederholung Vektorräume

Wir betrachten Abbildungen zwischen 2 Vektorräumen U und V

- Vektorräume in dieser VL: $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ und Unterräume davon (Ursprungsgeraden, Ursprungsebenen, span$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$)
- Basis eines Vektorraums: $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ mit linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_i, i = 1, \ldots, n$
- Dimension eines Vektorraums: Anzahl der Basiselemente (ist unabhhängig von der Wahl der Basis)

Definition einer linearen Abbildung

Es seien U und V zwei Vektorräume. Eine Abbildung

$$\varphi \;:\; U \to V \;,\; \vec{x} \to \varphi(\vec{x})$$

heißt eine lineare Abbildung (linearer Operator), falls gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}+\vec{y}) &= \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in U\,, \\ \varphi(\lambda\vec{x}) &= \lambda\,\varphi(\vec{x}) \qquad\qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und für alle } \vec{x} \in U. \end{aligned}$$

Anmerkungen:

1. Die beiden obigen Bedingungen sind äquivalent zu

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\,\varphi(\vec{x})+\beta\,\varphi(\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in U\,,\; \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,.$$

Anmerkungen

2. Eine lineare Abbildung φ bildet das Nullelement von U auf das Nullelement von V ab:

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

3. Eine lineare Abbildung $\varphi \; : \; U \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) heißt auch lineares Funktional.

4. Eine bijektive lineare Abbildung $\varphi \; : \; U \to U$ heißt regulär.

Beispiele linearer Abbildungen

1. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(t) = 3t.$

Es gilt nämlich

$$\varphi(\alpha s + \beta t) = 3(\alpha s + \beta t) = \alpha \cdot (3s) + \beta \cdot (3t) = \alpha\varphi(s) + \beta\varphi(t)$$

2. $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \varphi(z) = i\,z.$
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad .$
4. Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann ist $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \ \varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$ eine lineare Abbildung.

Gegenbeispiele

Nicht linear sind

1. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \varphi(t) = 3t + 1$, da
$$\varphi(\lambda t) \;=\; 3\lambda t + 1 \;\neq\; \lambda(3t+1) \;=\; \lambda\varphi(t)$$

2. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ h(x_1, x_2) \;=\; \exp(x_1 + x_2)$, da
$$\lambda h(x_1, x_2) \;=\; \lambda \exp(x_1 + x_2) \;\neq\; \exp(\lambda x_1 + \lambda x_2) \;=\; h(\lambda x_1, \lambda x_2)$$

3. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$g(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften linearer Abbildungen

1. Die Verkettung linearer Abbildungen ist wieder linear:

$$\varphi : U \to V \,,\ \psi : V \to W \ \text{ linear} \quad \Rightarrow \quad \psi \circ \varphi : U \to W \quad \text{linear} .$$

2. Ist $\varphi : U \to V$ bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : V \to U$.

$$\varphi \ \text{ linear} \ \Rightarrow \ \varphi^{-1} \ \text{ linear}.$$

Bildraum und Nullraum

Es sei $\varphi : U \to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren

- Bildraum von φ (das Bild von φ)

$$\mathcal{R}(\varphi) = \{\vec{v} \in V : \text{ es gibt ein } \vec{u} \in U \text{ mit } \vec{v} = \varphi(\vec{u})\}$$

- Nullraum (Kern) von φ

$$\mathcal{N}(\varphi) = \{\vec{u} \in U : \varphi(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

$\mathcal{R}(\varphi)$ und $\mathcal{N}(\varphi)$ sind lineare Teilräume von U und V.

Rangformel

Die Dimensionen dieser Teilräume heißen

- Rang von φ:

$$\mathrm{rang}(\varphi) := \dim \mathcal{R}(\varphi)$$

- Defekt von φ

$$\mathrm{def}(\varphi) := \dim \mathcal{N}(\varphi))$$

Satz:(Rangformel)

Es sei $\varphi \ : \ U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim U \ = \ \mathrm{rang}(\varphi) \ + \ \mathrm{def}(\varphi) \ = \ \dim \mathcal{R}(\varphi) \ + \ \dim \mathcal{N}(\varphi) \ .$$

Beispiel Kern und Bild

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,,\; \varphi(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 2x - y \\ -6x + 3y \end{pmatrix} \;.$$

- Kern

$$\varphi(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -6x + 3y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}(\varphi) \;=\; \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad .$$

- Bild : Die 2. Komponente ist das (-3)-fache der 1. Komponenten ist. Damit ergibt sich

$$\mathcal{R}(\varphi) \;=\; \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \quad .$$

- Rangformel

$$\text{rang}(\varphi) = 1 \;\text{ und }\; \text{def}(\varphi) = 1 \quad \text{und} \quad 2 \;=\; \dim \mathbb{R}^2 \;=\; \text{rang}(\varphi) \;+\; \text{def}(\varphi) \quad .$$

Injektivität und Surjektivität

Es sei $\varphi : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varphi) &= V &\Leftrightarrow \varphi \text{ surjektiv}, \\ \mathcal{N}(\varphi) &= \{\vec{0}\} &\Leftrightarrow \varphi \text{ injektiv}. \end{aligned}$$

Im Spezialfall $\dim(U) = \dim(V) = n$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \dim(\mathcal{R}(\varphi)) = \dim(V) \\ &\Leftrightarrow \dim(\mathcal{N}(\varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ injektiv}. \end{aligned}$$

16.2: Lineare Abbildungen und Matrizen

- Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert eine lineare Abbildung
$$\varphi_A \;:\; \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\,,\;\varphi_A(\vec{x}) \;:=\; A\vec{x}.$$

- Umgekehrt lässt sich jede lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ in der Form
$$\phi(\vec{x}) = A\vec{x}$$
mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ darstellen.

- **Beispiel**:
$$\varphi \;:\; \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2\,,\;\varphi(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \;=\; A\vec{x}$$
mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ werden auf die Spaltenvektoren $\vec{a}_i$ von A abgebildet.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Es gilt

- rang(ϕ_A) = rang(A) und ϕ_A zu $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann regulär (bijektiv), wenn A regulär ist
- Ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n \times n$
$$\phi_A(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$
ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A regulär ist, d.h. $\phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bijektiv. Dann korrespondiert zu jedem Bild $\vec{b}$ genau ein Vektor $\vec{x}$, so dass (1) gilt.
- Ist A (bzw. ϕ_A) regulär, dann existiert die Umkehrabbildung ϕ_A^{-1} (so dass $\phi_A^{-1} \circ \phi_A(\vec{x}) = \vec{x}$) und diese korrespondiert zur inversen Matrix A^{-1}
$$\phi_A^{-1} = \phi_{A^{-1}}$$
- Die Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ entspricht der Konkatenation
$$\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B \qquad \text{(in Matrizenschreibweise } (AB)\vec{x} = A(B\vec{x})\text{)}$$

Beispiel

Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

vermittelt die lineare Abbildung
$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \ \varphi_A(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

- Die Matrix A ist invertierbar mit $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$
- Damit ist φ_A ebenfalls umkehrbar und hat die Umkehrfunktion
$$\varphi_A^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}.$$
- Da die Matrix A regulär ist, folgt
$$\mathcal{R}(\phi_A) = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{N}(\phi_A) = \{0\} \quad .$$

Lineare Abbildungen und Basen

Manchmal ist es sinnvoll andere Basen für U und/oder V zu wählen

Beispiel: U_g ist eine Urspungsgerade im $\mathbb{R}^2$

$$U_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 2x\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

- Die Basis von U_g besteht hier nur aus dem Vektor $\vec{u}_1 := (1,2)$. Die Werte $g(\vec{e}_1)$, $g(\vec{e}_2)$ einer Abbildung $g: U_g \to V$ sind für die Standardbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ evtl. gar nicht definiert
- Die Matrixdarstellung wird in solchen Fällen bzgl. der Koordinaten der Basis $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ (im Beispiel: nur $\vec{u}_1$) formuliert
- Im Beispiel $g: U_g \to \mathbb{R}^2$ ist das eine 1×2-Matrix $A_{\mathcal{U}}$ bzgl. der Koordinate α

$$g(\vec{u}) = g(\alpha) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=A_{\mathcal{U}}} \alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung mit allgemeinen Basen

- Sei $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ eine Basis von U und $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von V
- Jedes $\vec{x} \in U$ lässt sich darstellen als

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i, \quad \text{d.h.} \quad \vec{x}_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

- Jedes $\vec{y} \in V$ lässt sich darstellen als

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{v}_i, \quad \text{d.h.} \quad \vec{y}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

- Zu jeder linearen Abbildung gehört nun eine Matrix $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$, die von den Basen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abhängt
- Diese bildet auf die Koordinaten von $\phi(\vec{x})$ bzgl. $\mathcal{V}$ ab, d.h.

$$y = \phi(\vec{x}) \quad \text{entspricht } y_{\mathcal{V}} = A_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \vec{x}_{\mathcal{U}}$$

Anmerkungen

1. Die j-te Spalte von $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ ist der Koordinatenvektor des Bildes $\varphi(\vec{u}_j)$ bezüglich der Basis $\mathcal{V}$. Dabei sind die $\vec{u}_j$ die Basiselemente von $\mathcal{U}$.

2. Die Matrixdarstellung $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ einer linearen Abbildung hängt von den gewählten Basen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ab.

3. Durch die Angabe der Bilder $\varphi(\vec{u}_j)$ für die Basiselemente von $\mathcal{U}$ wird die lineare Abbildung eindeutig festgelegt. Für alle anderen Vektoren $u \in U$ gilt nämlich

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i\right) \underset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{u}_i)$$

Beispiel (von oben)

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \; \varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Mit den Basen

$$\mathcal{N}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{N}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ hat A die Darstellung

$$A_{\mathcal{N}_3\mathcal{N}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Der i-te Basisvektor von $\mathcal{N}_3$ wird auf den Spaltenvektor $\vec{a}_i$ abgebildet

Beispiel (2)

Wir wählen für U und V die Basen

$$\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

und berechnen die zu ϕ gehörende Matrix $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ bzgl. dieser Basen.

Die Bilder der Basisvektoren aus U sind

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{u}_1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{V}}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\varphi(\vec{u}_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{V}}{=} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \\
\varphi(\vec{u}_3) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{V}}{=} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel (3)

- Die Spaltenvektoren von $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ sind die Koordinaten von $\phi(\vec{u}_i)$ bzgl. $\mathcal{V}$

$$A_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad .$$

- Durch Matrix-Vektormultiplikation mit $A_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ wird jetzt ein Vektor $\vec{x}_{\mathcal{U}}$ (in der Darstellung bzgl. $\mathcal{U}$) auf den Vektor $\vec{y}_{\mathcal{V}}$ (in der Darstellung bzgl. $\mathcal{V}$) abgebildet, d.h.

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

- Anmerkung: Im Skriptum wird $A_{\mathcal{N}_3\mathcal{V}}$ berechnet

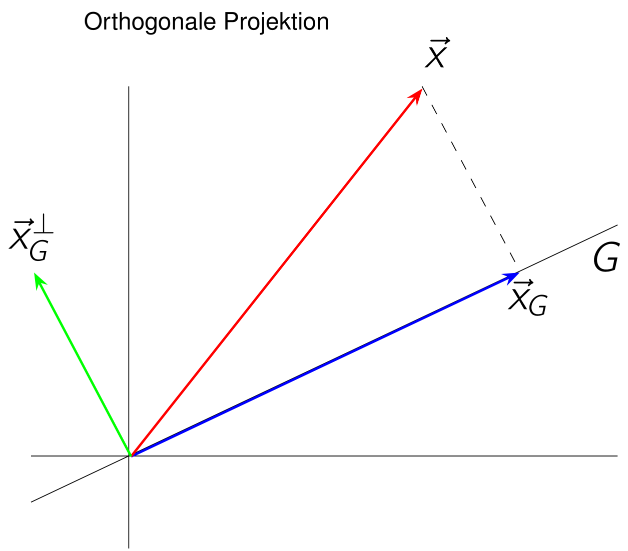
16.3 Spezielle lineare Abbildungen: Orthogonale Projektionen

Projektionen sind lineare Abbildungen, die einen Vektorraum V auf einen linearen Teilraum U abbilden

Beispiele (siehe auch Mathe I)

- Projektion des $\mathbb{R}^2$ auf eine Urspungsgerade

$$U = \text{span}\{v\}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{v}\| = 1$$



- Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf eine Ursprungsebene

Projektion auf eine Ursprungsgerade

Aus der Mathe I ist bekannt

$$P : \mathbb{R}^2 \to U \qquad \begin{aligned} P\vec{x} &= <\vec{v},\vec{x}>\vec{v} = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= (v_1x_1 + v_2x_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1v_1x_1 + v_1v_2x_2 \\ v_2v_1x_1 + v_2v_2x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit hat die orthogonale Projektion bezüglich der natürlichen Basis $\mathcal{N}$ die Matrixdarstellung

$$P \stackrel{\mathcal{N},\mathcal{N}}{=} \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} (v_1 \;\; v_2) = \vec{v}\,\vec{v}^{\,T}.$$

Man nennt P auch die Projektionsmatrix.

Beispiel

Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf die 1.Winkelhalbierende $U = \text{span}\{\vec{e}\}$ mit $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$.

Die Projektionsmatrix ist

$$P = \vec{e}\,\vec{e}^{\,T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} .$$

Beispiel: Die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{z} = \binom{2}{1}$ auf die 1. Winkelhalbierende ist damit

$$P\vec{z} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix} .$$

Allgemeine orthogonale Projektionen

Allgemein gilt für die Projektion $P : \mathbb{R}^n \to U = \text{span}\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}\}$ mit einer beliebigen ONB $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}$

$$P = \vec{e}_1 \, \vec{e}_1^{\,T} + \vec{e}_2 \, \vec{e}_2^{\,T} + \cdots + \vec{e}_m \, \vec{e}_m^{\,T} \quad .$$

Spezialfall: Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf eine Ursprungsebene E mit der Normalendarstellung

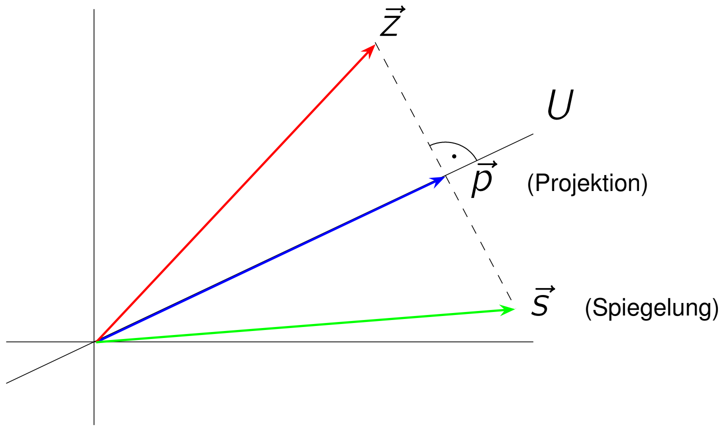
$$E \; : \; n_1 x + n_2 y + n_3 z = 0 \, , \qquad \|\vec{n}\| = 0$$

Für die Projektionsmatrix erhält man

$$P_E = I - \vec{n} \, \vec{n}^{\,T} = \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{pmatrix} .$$

Spiegelungen

Spiegelung an einer Gerade im $\mathbb{R}^2$
oder einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Der gespiegelte Punkt $\vec{s}$ liegt auf der verlängerten Strecke $\overline{z\,p}$, wobei $\vec{p}$ die Projektion von $\vec{z}$ auf den Unterraum U ist.

Eine Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene E mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ besitzt die Spiegelungsmatrix

$$S_E = I - 2\vec{n}\,\vec{n}^T = \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel Spiegelung

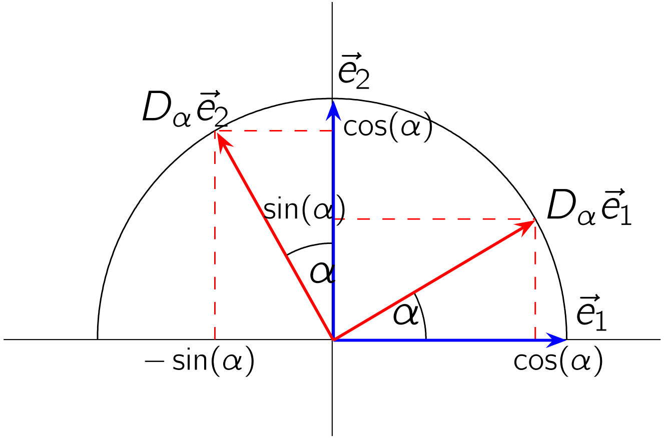
Beispiel: Es sei E die (x, y)-Ebene. Diese besitzt den Normaleneinheitsvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit wird die Spiegelung an E durch die Matrix

$$S_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

beschrieben.

Drehungen (Rotationen) im $\mathbb{R}^2$

Drehung um einen Winkel α entgegen des Uhrzeigersinns



Drehung der Einheitsvektoren

$$D_\alpha \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad D_\alpha \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die (Dreh- oder Rotationsmatrix) (bezüglich der natürlichen Basis)

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Drehungen im $\mathbb{R}^3$ um eine Hauptachse

- Drehung um den Winkel α um die x-Achse (als Drehachse) wird beschrieben durch

$$D_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} .$$

- Entsprechend besitzen die Drehungen um die y-Achse bzw. z-Achse die Matrixdarstellungen

$$D_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$