Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 8: Eigenwerte und Eigenvektoren (Kap 17, Teil 2)

Dr. Stefan Frei, 22.06.2020

Wiederholung

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wenn es einen Eigenvektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit

$$A\vec{x} \;=\; \lambda\vec{x}. \qquad \text{bzw. äquivalent } (A-\lambda I)\vec{x} \;=\vec{0}$$

- Solch ein $\vec{x}$ gibt es genau dann, wenn die Matrix $A-\lambda I$ keinen Vollrang hat, d.h.

$$p(\lambda) := \det(A-\lambda I) = 0$$

- Algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i: Vielfachheit der Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- Geometrische Vielfachheit: Dimension des Eigenraums $\mathrm{eig}(A, \lambda_i)$
- Es gilt

$$\textbf{geometrische Vielfachheit} \;\leq\; \textbf{algebraische Vielfachheit}\,.$$

Wiederholung (2)

- Die algebraischen Vielfachheiten summieren sich zu n (Fundamentalsatz der Algebra)
- Summieren sich auch die geometrischen Vielfachheiten zu n, so kann man eine Basis aus Eigenvektoren bilden

Fragen

- Wann entsprechen die geometrischen Vielfachheiten den algebraischen?
- Wann haben Matrizen dieselben Eigenwerte?

Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit

$$B = T^{-1}AT \quad .$$

Man nennt dann $T^{-1}AT$ eine Ähnlichkeitstransformation von A.

Beispiel: Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: B \quad .$$

Somit sind A und B ähnlich.

Eigenwerte ähnlicher Matrizen

Satz: Seien A und B ähnlich (d.h. $B = T^{-1}AT$). Dann haben A und B dieselben Eigenwerte.

Beweis:

- Sei λ ein EW von A und $\vec{x}$ ein zugehöriger EV
- Dann gilt für $\vec{y} = T^{-1}\vec{x}$

$$\begin{aligned} B\vec{y} \;=\; (T^{-1}AT)\vec{y} \;&=\; T^{-1}ATT^{-1}\vec{x} \\ &=\; T^{-1}A\vec{x} \\ &=\; T^{-1}(\lambda\vec{x}) \;=\lambda T^{-1}\vec{x} \;=\; \lambda\vec{y}. \end{aligned}$$

- λ ist also auch ein EW von $B = T^{-1}AT$ und $\vec{y} = T^{-1}\vec{x}$ ein zugehöriger EV.

Zusammenhang zum Basiswechsel bei linearen Abbildungen

Wir betrachten eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix T von oben

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =: \left(\vec{b}_1\,, \vec{b}_2\right) \qquad \text{mit } \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sei

- ϕ eine lineare Abbildung
- A die zugehörige Matrix bzgl. der Standardbasis $\mathcal{A} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
- B die zugehörige Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$

D.h. es gilt

$$\vec{y} = \phi(\vec{x}) = A\vec{x}, \tag{1}$$

$$\vec{y}_{\mathcal{B}} = \phi(\vec{x})_{\mathcal{B}} = B\vec{x}_{\mathcal{B}} \tag{2}$$

Außerdem ist

$$\vec{b}_1 = T\vec{e}_1, \ \vec{b}_2 = T\vec{e}_2, \qquad \text{und damit} \qquad \vec{x}_{\mathcal{B}} = T\vec{x}, \quad \vec{y}_{\mathcal{B}} = T\vec{y}$$

Basiswechsel (2)

Die Relation $\vec{y}_{\mathcal{B}} = B\vec{x}_{\mathcal{B}}$ (2) lässt sich also schreiben als

$$T\vec{y} = BT\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = T^{-1}BT\vec{x}$$

Gleichzeitig gilt nach (1) $\vec{y} = A\vec{x}$, d.h.

$$A = T^{-1}BT$$

Daraus folgt

- Die Matrizen A und B, die dieselbe linearen Abbildung ϕ bzgl. verschiedener Basen darstellen, sind also ähnlich zu einander, d.h. sie haben dieselben Eigenwerte
- Eine Ähnlichkeitstransformation entspricht einem Basiswechsel im Bild- und Urbildraum

Im obigen Bsp ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ die Darstellung einer lin. Abb. ϕ zur Standardbasis und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Darstellung zur Basis $\mathcal{B}$.

Diagonalisierbare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d.h.

$$T^{-1} A T = D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit einer invertierbaren Matrix } T \text{ .}$$

Satz:

- Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, falls die geometrische und die algebraische Vielfachheit für jeden Eigenwert übereinstimmen
- Das ist äquivalent dazu, dass es eine Basis aus Eigenvektoren gibt (siehe Folie 3)

Diagonalisierung (Hauptachsentransformation)

Die Ähnlichkeitstransformation T und die Diagonalmatrix D enthalten die Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ und die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)\,.$$

Die Reihenfolge der Eigenwerte ist dabei beliebig. Es müssen nur die Eigenvektoren in T entsprechend angeordnet werden.

Beispiel 1

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ hat den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sowie die Eigenräume

$$\mathrm{eig}(A, -1) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{eig}(A, 1) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

A ist diagonalisierbar, da algebraische und geometrische Vielfachheiten übereinstimmen (bzw. $\dim(\mathrm{eig}(A, -1)) + \dim(\mathrm{eig}(A, 1)) = 3$)

Wir erhalten

$$T^{-1}AT = D \quad \text{mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ hat den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sowie die Eigenräume

$$\operatorname{eig}(A, -1) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \operatorname{eig}(A, 1) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

A ist diagonalisierbar, da algebraische und geometrische Vielfachheiten übereinstimmen (bzw. $\dim(\operatorname{eig}(A, -1)) + \dim(\operatorname{eig}(A, 1)) = 3$)

Andere Anordnung:

$$T^{-1}AT = D \quad \text{mit } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat $\lambda = 2$ als dreifachen Eigenwert (siehe oben). Der Eigenraum

$$\text{eig}(B, 2) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad .$$

hat nur die Dimension $1 < 3$. Damit ist B nicht diagonalisierbar.

Beispiel diagonalisierbarer Matrizen

Normale Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (d.h. $AA^+ = A^+A$) sind diagonalisierbar. In diesem Fall gibt es eine ONB aus Eigenvektoren und eine unitäre Matrix T (d.h. $T^{-1} = T^+$), so dass

$$T^{-1}AT = T^+AT = D$$

Darunter fallen insbesondere

- Hermitesche Matrizen (insbes. reelle symmetrische Matrizen): Dabei sind alle EW reell.
- Unitäre Matrizen (insbes. reelle orthogonale Matrizen): Hier haben alle EW den Betrag 1 (können aber komplex sein).

Spektraldarstellung normaler Matrizen

Zu einer normalen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bezeichne $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte. Weiter seien

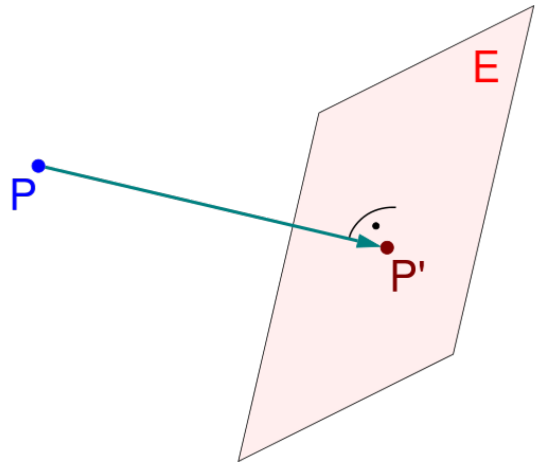
$E_j = \operatorname{eig}(A, \lambda_j)$ die Eigenräume, versehen mit einer ONB $\mathcal{B}_j$, und

$P_j : \mathbb{C}^n \to E_j$ die (orthogonalen) Projektionsmatrizen in E_j.

Satz: Dann lässt sich A zerlegen in die Projektionen P_j:

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j .$$

Dies nennt man die Spektraldarstellung von A.



www.wikipedia.de, Autor: Quartl (CC BY-SA 3.0)

Beispiel

Diagonalisierung und Spektraldarstellung der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- Charakteristisches Polynom

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 8-t & 0 & 2 \\ 0 & 4-t & 0 \\ 2 & 0 & 5-t \end{vmatrix} = (4-t)[(8-t)(5-t)-4] = (4-t)^2(9-t) \quad .$$

- Damit besitzt A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 4$ und den einfachen $\lambda_2 = 9$.
- Zugehörige Eigenräume (nachrechnen!)

$$\mathrm{eig}(A,4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit der ONB} \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}.$$

$$\mathrm{eig}(A,9) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit der ONB} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{e}_3\}.$$

Beispiel (Diagonalisierung)

A wird durch die unitäre (hier orthogonale) Matrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert:

$$T^T A T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D.$$

Beispiel (Spektraldarstellung)

Die Projektionsmatrizen auf die Eigenräume sind dann

- $P_1 \; : \; \mathbb{C}^3 \to \text{eig}(A, 4) \; :$

$$P_1 = \vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,T} + \vec{e}_2 \vec{e}_2^{\,T} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (1,\ 0,\ -2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0,\ 1,\ 0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} ,$$

- $P_2 \; : \; \mathbb{C}^3 \to \text{eig}(A, 9) \; :$

$$P_2 = \vec{e}_3 \vec{e}_3^{\,T} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (2,\ 0,\ 1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Damit erhält man die Spektraldarstellung

$$A = 4\,P_1 + 9\,P_2 = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Anwendung auf Matrixfunktionen

Wir wollen für eine normale Matrix $A \in K^{n \times n}$ die Matrix-Exponentialfunktion $\exp(A)$ berechnen, z.B. zur Lösung von Differentialgleichungssystemen

Definition Exponentialfunktion für Matrizen

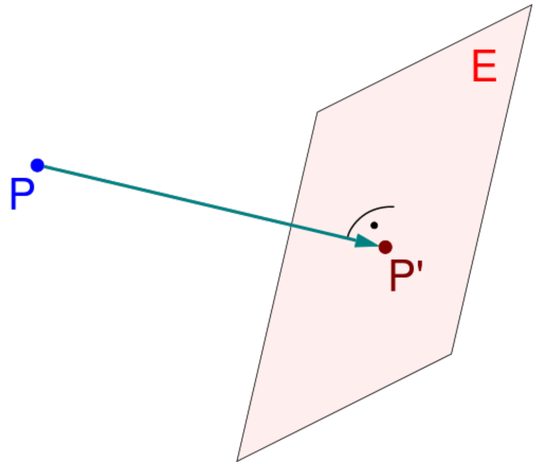
$$\exp(A) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Wie berechnet man A^k?

- Orthogonale Projektionen $\{P_1, \dots, P_m\}$ zu einer ONB $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ haben die Eigenschaft

$$P_i^2 = P_i, \qquad P_i P_j = 0_{n \times n} \quad i \neq j$$

- Wir zerlegen A in seine Spektraldarstellung



www.wikipedia.de, Autor: Quartl (CC BY-SA 3.0)

Matrix-Exponentialfunktion

Es gilt mit der Spektraldarstellung von A

$$A^2 = (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_m P_m)^2 = \lambda_1^2 P_1 + \ldots + \lambda_m^2 P_m$$

und analog

$$A^k = (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_m P_m)^k = \lambda_1^k P_1 + \ldots + \lambda_m^k P_m$$

Es ergibt sich

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k P_1 + \ldots + \lambda_m^k P_m}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} P_1 + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^k}{k!} P_m$$

$$= e^{\lambda_1} P_1 + \ldots + e^{\lambda_m} P_m = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k} P_k$$

Analog berechnet man $\exp(At) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} P_k$

Beispiel

Wir betrachten die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Charakteristisches Polynom

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(2-t) - 1 = (t-3)(t-1)\,.$$

- Damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

- Die zugehörigen Eigenräume sind (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,3) &= \mathrm{span}\,\{\vec{e}_1\} = \mathrm{span}\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad , \\ \mathrm{Eig}(A,1) &= \mathrm{span}\,\{\vec{e}_2\} = \mathrm{span}\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \quad . \end{aligned}$$

Beispiel (2)

Mit den Projektionsmatrizen

$$P_1 = \vec{e}_1\, \vec{e}_1^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \vec{e}_2\, \vec{e}_2^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Spektraldarstellung

$$A = 3P_1 + 1P_2 = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Damit gilt

$$\exp(A) = e^3 P_1 + e^1 P_2 = e^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{2}e \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = e^{3t} P_1 + e^t P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} .$$

Rechnen mit der Matrix-Exponentialfunktion

- Für die Nullmatrix $0^{n\times n}$ gilt $e^0 = I$.
- $e^{A+B} = e^A e^B$ gilt **nur** für Matrizen A und B mit $AB = BA$.
- Die Matrix-Exponentialfunktion e^{At} ist nach t differenzierbar und es gilt

$$\left(e^{At}\right)' = A\, e^{At}.$$

- Für eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} .$$