Universität Konstanz

Mathematik II
für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 9: Systeme von Differentialgleichungen (Kap 18)

Dr. Stefan Frei, 29.06.2020

Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

mit Funktionen $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

- In **Vektorschreibweise**:

$$\dot{\vec{x}} = F(t, \vec{x}), \qquad \text{wobei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad F(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

- Eine Lösung auf einem Intervall I besteht aus n differenzierbaren Funktionen

$$x_i : I \to \mathbb{R}, \; t \to x_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

deren Ableitungen das System (1) erfüllen.

Autonomes Differentialgleichungssystem

Das Dgl-System heißt autonom, falls es die Form

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

hat (F ist unabhängig von t)

Beispiel (Autonomes Dgl-System):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

- Eine Lösung lautet

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2e^{3t} - 2e^{-t} \\ x_2(t) &= e^{3t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

- **Probe**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 6e^{3t} + 2e^{-t} = (2e^{3t} - 2e^{-t}) + 4(e^{3t} + e^{-t}) = x_1(t) + 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 3e^{3t} - e^{-t} = (2e^{3t} - 2e^{-t}) + (e^{3t} + e^{-t}) = x_1(t) + x_2(t). \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

Das Dgl-System (1) besitzt viele Lösungen. Um eine Lösung eindeutig zu bestimmen, braucht man n Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ x_n(t_0) &= \alpha_n \end{aligned} \quad .$$

Wir nennen das Dgl-System (1) zusammen mit dieser Anfangsbedingung eine **Anfangswertaufgabe** (AWA).

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz):

Sind die Funktionen $f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$ stetig differenzierbar, so besitzt die Anfangswertaufgabe **genau eine Lösung**.

Systeme 2.Ordnung

Ein allgemeines Differentialgleichungssystem 2. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)\\ &\vdots\\ \ddot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)\end{aligned}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\ddot{\vec{x}} = F(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}).$$

- Anwendungen in der Physik (Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$= Kraft F)

Anfangs- und Randwertaufgaben

Für eine eindeutige Lösung braucht man $2n$ Bedingungen.

Möglichkeiten:

- Anfangswertaufgabe: Gegeben sind Anfangswerte

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= \alpha_1\,, & \dot{x}_1(t_0) &= \beta_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n(t_0) &= \alpha_n\,, & \dot{x}_n(t_0) &= \beta_n \end{aligned}$$

- Randwertaufgabe: Gegeben sind Randwerte am Rand des Intervalls $[t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= \alpha_1\,, & x_1(t_1) &= \beta_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n(t_0) &= \alpha_n\,, & x_n(t_n) &= \beta_n \end{aligned}$$

Rückführung auf ein System erster Ordnung

Gegeben sei das **lineare Dgl-System 2. Ordnung**

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= a_{21}\dot{x}_1 + a_{22}\dot{x}_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Wir führen neue Variablen ein

$$u_1 = \dot{x}_1, \qquad u_2 = \dot{x}_2$$

Damit lässt sich (2) **äquivalent** als lineares System 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{u}_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ \dot{u}_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{aligned}$$

18.2 Lineare Dgl-Systeme 1.Ordnung

- Für allgemeine Dgl-Systeme erster Ordnung kann man in der Regel keine analytische Lösung angeben
- Näherungsweise Berechnung am Rechner (*Numerische Mathematik*)
- **Spezialfall**: Lineare autonome Systeme 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \; + \; b_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \; + \; b_n, \end{aligned}$$

in **Matrix-Vektorform**:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Homogenes System: $\vec{b} = 0$, sonst inhomogen

Beispiel chemische Reaktion

Eine radioaktive Substanz zerfalle in zwei Stufen mit Anteil k_i pro Zeiteinheit

$$S_1 \xrightarrow{k_1} S_2 \xrightarrow{k_2} S_3 \qquad (k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0).$$

- Sei $x_i(t)$ die Konzentration der Substanz S_i zum Zeitpunkt t. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= k_2 x_2(t) \end{aligned}$$

- Es ergibt sich das autonome, lineare, homogene Dgl-System

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des inhomogenen Systems

Eine spezielle partikuläre Lösung von

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}$$

ist durch die konstante Lösung $\vec{y}(t) \equiv \vec{x}$ des folgenden LGS gegeben

$$A\vec{x} \; = \; -\vec{b}.$$

Probe:

$$\dot{\vec{y}}(t) \; = \; \vec{0} \; = \; A\vec{x} + \vec{b} \; = \; A\vec{y}(t) \; + \; \vec{b} \quad .$$

- Diese konstante Lösung $\vec{y}(t)$ wird auch als stationäre Lösung bezeichnet.

Für die **allgemeine Lösung** des inhomogenen linearen Dgl-Systems gilt (vgl. Kap. 14)

allgemeine Lösung des inhomogenen Systems	=	allgemeine Lösung des homogenen Systems	+	partikuläre Lösung

Lösung des homogenen Systems

Wir betrachten das homogene System

$$\dot{\vec{x}}(t) \;=\; A\vec{x}(t) \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}) \quad .$$

Sei λ ein Eigenwert von A und $\vec{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist

$$\vec{y}(t) \;=\; e^{\lambda\, t}\,\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} e^{\lambda\, t}\, v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda\, t}\, v_n \end{pmatrix}$$

eine Lösung des homogenen linearen Dgl-Systems.

Probe: Es gilt

$$\dot{\vec{y}}(t) \;=\; \lambda\, e^{\lambda\, t}\,\vec{v} \;=\; e^{\lambda\, t}\, A\,\vec{v} \;=\; A\,(e^{\lambda\, t}\,\vec{v}) \;=\; A\,\vec{y}(t).$$

Lösungsraum

Sind $\vec{y}(t)$ und $\vec{z}(t)$ zwei Lösungen, so ist

$$\vec{w}(t) \;=\; c_1\,\vec{y}(t) \;+\; c_2\,\vec{z}(t) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ebenfalls eine Lösung des homogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{w}}(t) \;&=\; c_1\,\dot{\vec{y}}(t) \;+\; c_2\,\dot{\vec{z}}(t) \;=\; c_1\,A\,\vec{y}(t) \;+\; c_2\,A\,\vec{z}(t)\\ &=\; A\left(c_1\,\vec{y}(t) \;+\; c_2\,\vec{z}(t)\right) \;=\; A\,\vec{w}(t).\end{aligned}$$

Satz: Die Lösungsmenge des homogenenen linearen Dgl-Systems $\dot{\vec{x}} \;=\; A\vec{x}$ bildet einen n-dimensionalen linearen Raum (von Funktionen). Eine Basis dieses Raumes wird als Fundamentalsystem bezeichnet.

Beispiel

Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Partikuläre Lösung von $A\vec{x} = -\vec{b}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte und Eigenvektoren zur Lösung des homogenen Systems

$$\lambda_1 = 3\,,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ; \qquad \lambda_2 = 1\,,\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

- 2 Lösungen des homogenen Systems sind gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

Beispiel (2)

- Die beiden Lösungen homogenen Systems

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

  sind linear unabhängig und bilden damit ein Fundamentalsystem.

- **Allgemeine Lösung** des homogenen Systems

$$\vec{x}(t) = c_1\,\vec{y}(t) + c_2\,\vec{z}(t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}).$$

- **Allgemeine Lösung** des inhomogenen Systems

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\,\vec{y}(t) + c_2\,\vec{z}(t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}).$$

Diagonalisierbare Koeffizientenmatrix

- **Wiederholung**: A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren
- Dann können wir mit obigen Schritten den kompletten n-dimensionalen Lösungsraum berechnen (Sonst ist das komplizierter!)
- Das Fundamentalsystem zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ lautet

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\, \vec{v}_1 \\ &\vdots \\ \vec{r}_n(t) &= e^{\lambda_n t}\, \vec{v}_n \end{aligned}$$

- Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Dgl-Systems ist dann

$$\vec{z}(t) = c_1\, \vec{r}_1(t) + \cdots + c_n\, \vec{r}_n(t) \quad \text{mit } c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}\,.$$

- Die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ sind durch Vorgabe von Anfangswerten eindeutig bestimmt

Beispiel

Wir betrachten die homogene lineare Anfangswertaufgabe

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A ist diagonalisierbar. Es ergibt sich das Fundamentalsystem

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} \quad .$$

Damit lautet die **allgemeine Lösung**

$$\vec{z}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{t} \\ c_1\, e^{3t} - c_2\, e^{t} \end{pmatrix} \quad .$$

Beispiel (2)

Die Anfangsbedingungen liefern das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - c_2 &= 2 \end{aligned} \quad .$$

Als Lösung erhalten wir $c_1 = \frac{3}{2}$ und $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Damit ist die Lösung der AWA

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\, e^{3t} - \frac{1}{2}\, e^{t} \\ \frac{3}{2}\, e^{3t} + \frac{1}{2}\, e^{t} \end{pmatrix}$$

Verwendung der Matrix-Exponentialfunktion

Für die Matrix-Exponentialfunktion gilt (vgl. Kap. 17)

$$\left(e^{At}\right)' = A\,e^{At}.$$

Somit ist

$$\vec{z}(t) = e^{At}\,\vec{c} \quad \text{für jeden beliebigen Vektor } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

eine Lösung des homogenen linearen Dgl-Systems $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$.

Vorteil: Die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}\,, \quad \vec{x}(0) = \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

lässt sich direkt angeben (ohne Lösung eines LGS) als

$$\vec{z}(t) = e^{At}\,\vec{\alpha}.$$

Beispiel von oben

Wir betrachten wieder die homogene lineare Anfangswertaufgabe

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Spektraldarstellung von A

$$A = 3P_1 + 1P_2 = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

- Damit folgt

$$\exp(At) = e^{3t}P_1 + e^{t}P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}.$$

- Man erhält die Lösung der AWA

$$\vec{z}(t) = e^{At}\,\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,e^{3t} - \frac{1}{2}\,e^{t} \\ \frac{3}{2}\,e^{3t} + \frac{1}{2}\,e^{t} \end{pmatrix} \quad .$$

Erweiterungen

- Nichtdiagonalisierbare Matrizen A
- Zeitabhängige Koeffizienten $A(t)$, $\vec{b}(t)$
- Nichtautonome und nichtlineare Differentialgleichungen
- Dgl-Systeme höherer Ordnung (Randwertaufgaben)
- Partielle Differentialgleichungen

Denken Sie an die Evaluation (bis 05.07.2020):

`https://evasys.uni-konstanz.de/evasys/online.php?pswd=VNCRY`