

Fachbereich Mathematik und Statistik

Mathematik II

für die Studiengänge Chemie, Life Science und Nanoscience

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Dgl-Systemen**

(1) Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 8 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$
.

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T mit $D = T^{-1} A T$.
- c) Lösen Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = 2x_1,$$
 $x_1(0) = -1$
 $\dot{x}_2 = -8x_1 - 6x_2 + 8x_3,$ $x_2(0) = 5$
 $\dot{x}_3 = -4x_1 - 4x_2 + 6x_3,$ $x_3(0) = 1$

(2) Berechnen Sie die Lösung von

$$\dot{x} = -3x + 2y, \quad x(0) = 1$$

 $\dot{y} = 2x - 3y, \quad y(0) = 5$

- (3) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Ermitteln Sie alle Lösungen von

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix} \quad .$$

- (4) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.
- b) Finden Sie eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit $D = U^+AU$.
- c) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung von e^{At} .
- d) Lösen Sie das Dgl-System

$$\dot{x} = 2x + 3y, \quad \dot{x}(0) = 2$$

$$\dot{y} = 3x + 2y, \quad \dot{y}(0) = 1$$