**Universität Konstanz**

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 2020

Dr. S. Frei

# Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Linearen Abbildungen**

(1) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \, , \; \varphi\,(x_1, x_2) \; = \; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

und die Basen $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sowie $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Geben Sie die Matrixdarstellung zu $\varphi$ an, und zwar bezüglich

**a)** $\mathcal{N}$ im Urbild- und im Zielraum,

**b)** $\mathcal{N}$ im Urbild- und $\mathcal{B}$ im Zielraum,

**c)** $\mathcal{B}$ im Urbild- und $\mathcal{N}$ im Zielraum,

**d)** $\mathcal{B}$ im Urbild- und im Zielraum

(2) Es sei $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

**a)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

**b)** Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ hat bezüglich dieser Basen die Matrixdarstellung

$$\varphi \overset{\mathcal{A},\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Welche Matrixdarstellung hat $\varphi$ bezüglich der natürlichen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$?

**c)** Ist $\varphi$ injektiv?

(3) Es seien $D_\alpha$ und $D_\beta$ zwei Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Produkt $D_\alpha D_\beta$ wieder eine Drehmatrix $D_\gamma$ ist.

(4) Welche Matrixdarstellung $A$ (bezüglich der natürlichen Basis) hat die lineare Abbildung $\varphi$ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, durch die der Raum $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $x = y$ gespiegelt wird?

*bitte wenden*

(5) Es seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

**a)** Welche Matrix $S$ (bzgl. der natürlichen Basis) spiegelt den $\mathbb{R}^3$ an der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene?

**b)** Welche Matrix $P$ (bgzl. der natürlichen Basis) projiziert den $\mathbb{R}^3$ auf diese Ebene?

(6) Es sei $G = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie die Projektionsmatrix $P : \mathbb{R}^3 \to G$ des $\mathbb{R}^3$ auf die Gerade G.

Projizieren Sie den Punkt $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die Gerade $G$.

(7) **a)** Es sei $G = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Welche Matrixdarstellung (bezüglich der natürlichen Basis) hat die lineare Abbildung $\varphi_G$, die den $\mathbb{R}^3$ auf $G$ projiziert? Projizieren Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $G$.

**b)** Es sei $\varphi$ die lineare Abbildung, die den $\mathbb{R}^3$ zuerst an der Ebene $E : x - y + z = 0$ spiegelt und danach auf die Gerade $G$ aus a) projiziert. Welche Matrixdarstellung (bezüglich der natürlichen Basis) besitzt $\varphi$?

(8) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \ \varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x - 2z \\ -4x + 2y - 2z \end{pmatrix} .$$

Ist diese Abbildung regulär? Falls ja, so bestimmen Sie die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}$.