Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

SS 2020

Dr. S. Frei

Mathematik II

für die Studiengänge **Chemie, Life Science und Nanoscience**

Freiwillige Zusatzaufgaben zu **Matrizen und Determinanten**

(1) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 2i \\ 0 & -i & 1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (i ist die imaginäre Einheit).

a) Bestimmen Sie die zu A adjungierte Matrix.

b) Berechnen Sie AA^+.

c) Berechnen Sie eine Matrix B mit $BA = I$ (dabei ist I die 3×3 - Einheitsmatrix).

(2) Es seien $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Lösungsmenge von $(B - 4I)\vec{x} = \vec{0}$.

b) Bestimmen Sie den Rang von $(B - 4I)$.

c) Sind die Spalten von B linear unabhängig (mit Begründung)?

(3) Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Ist die Matrix $B = A + I$ invertierbar? Falls ja, so bestimmen Sie B^{-1}.

b) Lösen Sie $A\vec{x} = A^T\vec{x} + \vec{b}$.

c) Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(t) = \det(A + A^T - tI)$. Geben Sie $p(t)$ explizit an.

(4) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) Ermitteln Sie alle $u \in \mathbb{C}$ mit $\begin{vmatrix} u & 0 & 1 & u^2 & 1 \\ 1 & 1 & u & u^3 & 1 \\ 0 & 0 & u & u^4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(6) Es sei I die 3×3 - Einheitsmatrix und $\vec{h} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

a) Berechnen Sie $\vec{h}\,\vec{h}^T$ und $\vec{h}^T\,\vec{h}$.

b) Bestimmen Sie die Matrix $B = I - 2\,\vec{h}^T\,\vec{h}$.

c) Ist B orthogonal (mit Begründung)?

(7) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ normal ist.

(8) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Wie groß ist der Rang von A und welchen Wert hat die Determinante von A?

(9) Bestimmen Sie von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & \sqrt{13} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \\ 4 & -2 & i & 1+i & 5i \\ 2 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 4 & i \end{pmatrix}$$

die Determinante und den Rang. Dabei bezeichnet i die imaginäre Einheit.

(10) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\det(A \cdot B)$.