Cédric Milliet

Cours de

# THÉORIE DE LA MESURE, et INTÉGRATION AU SENS DE LEBESGUE

Version préliminaire

Cours de quatrième année de *Lisans*
Université Galatasaray, 2013

Cédric Milliet
Université Galatasaray
Faculté de Sciences et de Lettres
Département de Mathématiques
Çirağan Caddesi n°36
34357 Ortaköy, İstanbul, Turquie
*Mél :* milliet@math.univ-lyon1.fr
*Site internet :* http://math.gsu.edu.tr/milliet

# SOMMAIRE

# CHAPITRE 1

# L'INTÉGRALE DE RIEMANN

Cauchy donne en 1823 la première construction rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, utilisant essentiellement le fait qu'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ y est uniformément continue. Sa construction s'étend naturellement aux fonctions *réglée*, c'est-à-dire limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. Riemann remarque en 1854 que l'on peut généraliser le procédé de Cauchy à des fonctions non réglées, ce qui permet de définir l'intégrale pour une classe beaucoup plus large de fonctions, que l'on appelle aujourd'hui *Riemann-intégrables*. On rappelle dans ce chapitre la construction de l'intégrale de Riemann et ses propriétés principales.

## 1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Si $A$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction caractéristique de $A$* la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vaut 1 sur $A$ et 0 sur $\mathbf{R} \setminus A$. On la note $1_A$. On appelle *intervalle borné de $\mathbf{R}$* tout sous-ensemble de la forme $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$, ou encore $[a, b[$, où $a$ et $b$ sont deux nombre réels vérifiant $a \leqslant b$.

**Définition 1.1** On appelle *fonction en escalier* une combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions indicatrices d'intervalles bornés de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{I_i},$$

où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles bornés de $\mathbf{R}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

**Remarque**. L'ensemble $E$ des fonctions en escalier est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Pour deux intervalles $I$ et $J$, on a

$$1_I \times 1_J = 1_{I \cap J}.$$

L'intersection de deux intervalles étant encore un intervalle, l'ensemble $E$ est aussi stable par produits : c'est une $\mathbf{R}$-algèbre. Elle est engendrée par les fonctions indicatrices d'intervalles bornés, mais ces fonctions indicatrices ne sont pas libres. En particulier, il n'y a pas unicité de la représentation d'une fonction en escalier $e$ comme somme de fonctions indicatrices d'intervalles bornés. Mais si on impose que les intervalles $I_k$ soient disjoints et que $n$ soit minimal, alors la représentation de $e$ sous la forme $\sum \lambda_k 1_{I_k}$ est unique.

Si $I$ est un intervalle borné de $\mathbf{R}$, on appelle *longueur de $I$* son diamètre. On la note $\ell(I)$. On a donc

$$\ell\Big([a, b]\Big) = \ell\Big(]a, b[\Big) = \ell\Big([a, b[\Big) = \ell\Big(]a, b]\Big) = b - a.$$

**Définition 1.2** (intégrale d'une fonction en escalier) On définit *l'intégrale d'une fonction en escalier* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{I_k}$ notée $e$ en posant :

$$\int e = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell(I_k).$$

Si $I$ est un invervalle borné de $\mathbf{R}$, on note $\int_I e$ l'intégrale $\int \left(e \times 1_I\right)$.

**Remarque**. On peut vérifier en exercice que l'intégrale $\int e$ dépend uniquement de la fonction $e$, et pas du choix des $\lambda_k$ et $I_k$ de sa représentation. Cette définition de l'intégrale est la seule possible qui vérifie les deux propriétés $\int 1_I = \ell(I)$ et $\int 1_{I\cup J} = \int 1_I + \int 1_J$ pour deux intervalles disjoints $I$ et $J$.

**Remarque**. On ne modifie pas la valeur de l'intégrale $\int e$ en changeant la valeur de $e$ en un nombre fini de points. En particulier, on a $\int_{[a,b]} e = \int_{]a,b[} e = \int_{[a,b[} e = \int_{]a,b]} e$.

**Lemme 1.3** (additivité de l'intégrale des fonctions en escaliers) *Soient $e$ et $h$ deux fonctions en escalier. Alors, pour tous réels $\lambda$ et $\mu$, on a*

$$\int \left(\lambda e + \mu h\right) = \lambda \int e + \mu \int h.$$

**Lemme 1.4** (croissance de l'intégrale des fonctions en escaliers) *Si $e$ et $h$ sont deux fonctions en escalier vérifiant $e \leqslant h$, alors $\int e \leqslant \int h$.*

## 1.2 Intégrale de Riemann

Soit $I$ un intervalle borné de $\mathbf{R}$, et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbf{R}$. On note $M(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier qui majorent $f$ en tout point de $I$, et $m(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier qui minorent $f$. Si $f$ est bornée, $m(f)$ et $M(f)$ ne sont pas vides. Si $e$ est dans $m(f)$ et $h$ dans $M(f)$, on a $e \leqslant f \leqslant h$ sur $I$, et en particulier $\int_I e \leqslant \int_I h$. Les quantités $\sup_{m(f)} \int_I e$ et $\inf_{M(f)} \int_I h$ sont donc bien définies, et vérifient

$$\sup_{m(f)} \int_I e \leqslant \inf_{M(f)} \int_I h$$

**Définition 1.5** (fonction Riemann-intégrable) On dit que $f$ est *Riemann intégrable* si $f$ est bornée, et si $\sup_{m(f)} \int_I e$ et $\inf_{M(f)} \int_I h$ sont égaux. On appelle cette valeur l'*intégrale de Riemann de* $f$. On la note $\int_I f$, ou bien $\int_I f(x)dx$.

**Remarque**. On ne modifie pas la valeur de l'intégrale $\int_I f$ en changeant la valeur de $f$ en un nombre fini de points de $I$. En particulier, si $I$ est l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f.$$

On notera $\int_a^b f$ pour $\int_{]a,b[} f$.

**Exemples**. Les fonctions continues (par morceaux) sur $[a,b]$ sont Riemann-intégrable. C'est une conséquence du théorème de Heine. Plus généralement, toute limite uniforme de fonctions en escalier est Riemann-intégrable.

**Contre exemple**. La fonction indicatrice de $\mathbf{Q}$ sur $[0,1]$ n'est pas Riemann-intégrable.

## 1.3 Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann

### 1.3.1 Comportement face à la somme et au produit

**Proposition 1.6** (linéarité de l'intégrale) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle $I$, et soient $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels. Alors $\lambda f + \mu g$ est Riemann-intégrable sur $I$, et*

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

**Proposition 1.7** (produit) *Si $f$ et $g$ sont Riemann-intégrables sur $I$, alors le produit $fg$ l'est aussi.*

**Corollaire 1.8** (relation de Chasles) *Soit $I_1, \dots, I_n$ une partition de l'intervalle $I$ en un nombre fini d'intervalles. La fonction $f$ est Riemann-intégrable sur $I$ si et seulement si elle est intégrable sur $I_1, I_2, \dots$ et $I_n$. De plus,*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \cdots + \int_{I_n} f.$$

### 1.3.2 Quelques inégalités remarquables

**Proposition 1.9** (croissance) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrable sur un intervalle $I$.*

1. *Si $f$ est positive, $\int_I f$ l'est aussi.*
2. *Si $f \leqslant g$ sur $I$, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.*

**Remarque**. De la croissance de l'intégrale, on déduit l'inégalité $\left|\int_I f\right| \leqslant \ell(I) \times \sup_I |f|$.

**Théorème 1.10** (inégalité triangulaire) *Si $f$ est une fonction Riemann-intégrable sur l'intervalle $I$, la fonction $|f|$ est aussi Riemann intégrable, et $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.*

**Théorème 1.11** (inégalité de Hölder) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrable sur un intervalle $I$. Soient $p$ et $q$ deux nombres réels strictement positifs vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Les fonctions $f^p$ et $g^q$ sont Riemann-intégrables, et vérifient*

$$\int_I fg \leqslant \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}.$$

**Remarque**. En général, la composée de deux fonctions Riemann-intégrables n'est pas Riemann-intégrable.

**Théorème 1.12** (inégalité de Minkowski) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions Riemann-intégrable sur un intervalle $I$, et $p \geqslant 1$ un nombre réel. Alors,*

$$\left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}.$$

### 1.3.3 Passage à la limite

**Théorème 1.13** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbf{R}$, Riemann-intégrables sur $I$. Si cette suite converge uniformément vers $f$ sur $I$, alors $f$ est Riemann-intégrable sur $I$ et*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

**Corollaire 1.14** *Soit $E$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. L'application de $E$ dans $\mathbf{R}$ qui a une fonction $f$ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire continue sur $E$.*

### 1.3.4 Primitive et changement de variables

**Théorème 1.15** (primitive d'une fonction continue) *Soit $f$ une fonction Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a,b]$. L'application $F$ de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ qui à $x$ associe $\displaystyle\int_a^x f$ est lipschitzienne (et donc continue). Si de plus, $f$ est continue sur $[a,b]$, alors $F$ est dérivable sur $[a,b]$ et on a $F' = f$.*

**Corollaire 1.16** *Une application continue $f$ sur $[a,b]$ admet au moins une primitive $F$, et pour toute primitive $F$ de $f$, on a $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

**Corollaire 1.17** (intégration par parties) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classes $C^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

**Corollaire 1.18** (changement de variable) *Soit $I$ in intervalle borné de $\mathbf{R}$, $\varphi$ une application de $[a,b]$ dans $I$, de classe $C^1$ sur $[a,b]$, et $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbf{R}$. Alors*

$$\int_a^b f\circ\varphi\cdot\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

# CHAPITRE 2

# THÉORIE DE LA MESURE

La notion de mesure est introduite par Émile Borel en 1898 pour mesurer le « volume » noté $\mu$ de certains sous-ensembles de $[0,1]$ qu'il appelle ensembles « mesurables ». Ces ensembles sont construits à partir des intervalles inclus dans $[0,1]$ en utilisant les opération suivantes : réunion dénombrable, intersection finie, et passage au complémentaire. Si $A$ et $B$ sont deux ensembles « mesurables », leur mesure satisfait la propriété d'additivité :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Dans ce chapitre on commence donc par étudier les ensembles de parties stables par réunions et intersections finies et par passage au complémentaire (les *algèbres*), puis celles qui sont en plus stables par réunions dénombrables (les *$\sigma$-algèbre*). Ensuite, on introduit la notion de *mesure* sur une $\sigma$-algèbre, et on construit la mesure de Lebesgue sur une $\sigma$-algèbre qui contient tous les intervalles de $\mathbf{R}$.

## 2.1 Ensembles mesurables

### 2.1.1 Algèbre de parties

**Définition 2.1** (algèbre de parties) Soit $X$ un ensemble et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de $X$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de parties de* $X$ si

1. $\emptyset$ et $X$ appartiennent à $\mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie et par réunion finie.
3. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

**Exemples.** 1. (algèbre triviale) $\left\{\emptyset, X\right\}$ est une algèbre de parties de $X$.

2. (algèbre grossière) L'ensemble de toutes les parties de $X$ est une algèbre de parties de $X$.
3. (algèbre associée à une partition) Si $\pi$ est une partition finie de $X$ en $n$ sous-ensembles $X_1, \ldots, X_n$, l'ensemble de toutes les réunions finies d'éléments de $\pi$ est une algèbre de parties de $X$.
4. (algèbre sur $\mathbf{R}$) L'ensemble des réunions finies d'intervalles de $\mathbf{R}$ est une algèbre de parties de $\mathbf{R}$.
5. (algèbre engendrée par les pavés sur $\mathbf{R}^2$) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres de parties sur $\mathbf{R}$, on peut définir une algèbre naturelle sur $\mathbf{R}^2$ : on appelle un *pavé* un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ de la forme $A \times B$ où $A$ est un élément de $\mathcal{A}$ et $B$ un élément de $\mathcal{B}$. L'ensemble des pavés est stable par intersections finies, et le complémentaire d'un pavé peut s'écrire comme la

réunion de 2 pavés. L'ensemble des réunions finies de pavés est donc une algèbre de parties de $\mathbf{R}^2$.

6. (algèbre des cylindres sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$) Si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ sont des algèbres de parties de $\mathbf{R}$, on peut définir une algèbre de parties sur le produit infini $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de telle sorte que la $k$ième copie de $\mathbf{R}$ soit munie de l'algèbre $\mathcal{A}_k$. On définit pour cela un *cylindre de base* en posant $C_k(A) = \mathbf{R}^{k-1} \times A \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, pour tout $A$ dans $\mathcal{A}_k$. Le cylindre de base $C_k(A)$ est l'ensemble des suites de nombres réels dont la $k$ième coordonnée est dans $A$. Le complémentaire de $C_k(A)$ est le cylindre de base $C_k(\mathbf{R} \setminus A)$. On appelle *cylindre élémentaire* toute intersection finie de cylindres de bases, c'est-à -dire tout ensemble de la forme $C_{k_1}(A_1) \cap \cdots \cap C_{k_n}(A_n)$, que l'on note $C_{k_1,\dots,k_n}(A_1, \dots, A_n)$. L'ensemble des réunions finies de cylindres élémentaires est une algèbre de parties de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Cette construction se généralise à un produit infini $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ d'espaces d'ensembles $X_i$ chacun muni d'une algèbre de partie $\mathcal{A}_i$.

### 2.1.2 Sigma-algèbre de parties

**Définition 2.2** (σ-algèbre) Soit $X$ un ensemble, et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de $X$. On dit que $\mathcal{B}$ est une *σ-algèbre de parties de $X$* (ou une *tribu*) si $\mathcal{B}$ est une algèbre de parties de $X$ qui est stable par réunions et intersections dénombrables.

**Définition 2.3** (espace mesurable, ensemble mesurable) On appelle *espace mesurable* tout couple $(X, \mathcal{B})$ où $X$ est un ensemble, et $\mathcal{B}$ une $\sigma$-algèbres de parties de $X$. On appelle alors les éléments de $\mathcal{B}$ les *ensembles mesurables* de $X$.

On construit souvent une $\sigma$-algèbre sur $X$ à partir de parties particulières de $X$, à l'aide de la propositition suivante :

**Proposition 2.4** (tribu engendrée) *Soit $X$ un ensemble, et $\mathcal{A}$ un ensemble quelconque de parties de $X$. L'intersection de toutes les $\sigma$-algèbres contenant $\mathcal{A}$ est une $\sigma$-algèbre. On l'appelle* tribu engendrée par $\mathcal{A}$*, et on la note $\sigma(\mathcal{A})$. C'est la plus petite $\sigma$-algèbre qui contient $\mathcal{A}$*

Les espaces mesurables auxquels nous allons nous intéresser sont souvent munis d'une topologie ; on utilise alors la tribu engendrée par les ouverts.

**Définition 2.5** (tribu borélienne) si $X$ est un espace topologique, appelle *tribu des boréliens de $X$* la $\sigma$-algèbre engendrée par les ouverts (ou par les fermés) de $X$. On la note $\mathcal{B}(X)$.

**Exemples**.

1. (tribu triviale et tribu grossière) $\{\emptyset, X\}$ est une $\sigma$-algèbre de parties de $X$. C'est la plus petite tribu sur $X$ appelée tribu triviale. $P(X)$ est une $\sigma$-algèbre de parties de $X$. C'est la plus grosse tribu sur $X$. On l'appelle tribu grossière.
2. (tribu des boréliens de $\mathbf{R}$) On considère la $\sigma$-algèbre engendrée par tous les ouverts (i.e. les réunions d'intervalles ouverts) de $\mathbf{R}$. On appelle cette $\sigma$-algèbre la *tribu des boréliens de* $\mathbf{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ contient tous les ouverts de $\mathbf{R}$. Elle contient donc aussi tous les fermés de $\mathbf{R}$, et aussi les unions dénombrables d'intersections dénombrables d'ensembles ouverts ou fermés etc.
3. (tribu des boréliens de $\mathbf{R}^n$) On appelle *tribu des boréliens de* $\mathbf{R}^n$ la $\sigma$-algèbre engendrée par tous les ouverts de $\mathbf{R}^n$ (pour la topologie produit). On la note $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.
4. (tribu produit sur $\mathbf{R}^2$) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\sigma$-algèbres sur $\mathbf{R}$, on construit une $\sigma$-algèbre naturellement associée au produit $\mathbf{R}^2$ de la manière suivante. On a vu que les réunions

finis de pavés (i.e. de sous-ensembles de la forme $A \times B$ où $A$ est dans $\mathcal{A}$ et $B$ dans $\mathcal{B}$) forment une algèbre de partie de $\mathbf{R}^2$. On considère la tribu engendrée par les pavés. On l'appelle *tribu produit sur* $\mathbf{R}^2$. On la note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

5. (tribu cylindrique sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$) C'est la $\sigma$-algèbre engendrée par les cylindres élémentaires.

**Proposition 2.6** *La tribu* $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ *est engendrée*

1. *par les intervalles ouverts bornés* $]a, b[$, *ou*
2. *par les intervalles fermés bornés* $[a, b]$, *ou*
3. *par les demi-droites ouvertes* $]-\infty, a[$, *ou encore*
4. *par les demi-droites fermées* $]-\infty, q[$, *où* $q$ *est un nombre rationnel.*

**Exercice**. On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ est engendrée par

1. les pavés fermés bornés $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, ou
2. les pavés ouverts bornés $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$, ou encore
3. les pavés fermés dont les bornes sont des nombres rationnels.

**Exercice**. On a construit deux $\sigma$-algèbre sur $\mathbf{R}^2$. La première, $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ engendrée par les ouverts pour la topologie produit. La deuxième, $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$, la tribu produit. Ces deux tribus sont elles différentes ?

## 2.2 Mesures

### 2.2.1 Mesure additive

**Définition 2.7** (mesure additive) Soit $X$ un ensemble, et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de $X$. On appelle *mesure additive sur* $(X, \mathcal{A})$ une application $\mu$ de $\mathcal{A}$ dans la demie droite étendue $[0, +\infty]$ qui vérifie la propriété d'*additivité* : si $A$ et $B$ sont deux ensembles disjoints dans $\mathcal{A}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

**Remarques**. 1. La mesure de l'ensemble vide est soit 0 soit $+\infty$.

2. $\mu$ est croissante : si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
3. Si $A$ et $B$ sont deux parties de $\mathcal{A}$, on a $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
4. $\mu$ est sous-additive : si $A_1, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{A}$, on a

$$\mu\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) \leqslant \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n).$$

**Exemples**. 1. (sur l'algèbre associée à une partition) Soit $X$ un ensemble, $X_1, \ldots, X_n$ une partition de $X$, et $\mathcal{A}$ l'algèbre des réunions finis des $X_i$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels positifs. L'application qui à un élément $X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_m}$ de $\mathcal{A}$ associe le réel $\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m}$ est une mesure additive sur $(X, \mathcal{A})$.

2. (sur $\mathbf{R}$) On considère l'algèbre de parties de $\mathbf{R}$ constituée des réunions finies d'intervalles. Notons la $\mathcal{A}$. Chaque membre $A$ de $\mathcal{A}$ s'écrit de manière unique comme une réunion finie $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ d'intervalles disjoints maximaux (les composantes connexes de $A$). L'application qui à $A$ associe la somme $\ell(I_1) + \cdots + \ell(I_n)$ est une mesure additive sur $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$.
3. (sur $\mathbf{R}^2$)

### 2.2.2 Mesure $\sigma$-additive

**Définition 2.8** (mesure, espace mesuré) Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable. On appelle *mesure $\sigma$-additive sur* $(X, \mathcal{B})$ (ou simplement *mesure sur* $(X, \mathcal{B})$) une application $\mu$ de $\mathcal{B}$ dans la demie droite étendue $[0, +\infty]$ qui vérifie la propriété suivante (appelée *$\sigma$-additivité*) : pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\geqslant 1}$ d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

On dit alors que le triplet $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un *espace mesuré.*

Par abus de notation, on dit souvent que $\mu$ est une mesure sur $X$. La $\sigma$-algèbre $\mathcal{B}$ est alors implicite. On dira aussi parfois que $X$ est un espace mesuré, la $\sigma$-algèbre et la mesure étant toutes les deux implicites.

**Remarques**.

1. La série est à termes positives, elle est donc soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.
2. Si $\mu(X) = 1$, on dit que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un *espace de probabilité.*

**Proposition 2.9** (propriétés d'une mesure) *Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré et $A$, $B$ des ensembles mesurables.*

1. *(additivité)* $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. *(monotonie) Si $A$ est inclus dans $B$, alors* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

*Soit $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables.*

3 *($\sigma$-sous additivité)* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

4 *(continuité à gauche) Si la suite $A_1, A_2, \ldots$ est croissante,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

5 *(continuité à droite) Si les parties $A_1, A_2, \ldots$ sont décroissantes et de **mesure finie**,*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

**Exercice**. Trois opérations simples sur les mesures :

1. On obtient une nouvelle mesure en multipliant une mesure par un nombre réel postitif.
2. Si $(X, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, avec deux mesures $\mu$ et $\nu$ mesures sur $\mathcal{B}$, la somme $\mu + \nu$ est encore une mesure sur $\mathcal{B}$.
3. Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré et $A$ un sous-ensemble mesurable de $X$, la restriction $\mu|_A$ de $\mu$ à la tribu des parties mesurables de $X$ qui sont incluses dans $A$ induit une structure d'espace mesuré sur $A$.

**Exemples**. 1. (Mesures triviales) La fonction nulle, ou la fonction constante égale à $+\infty$.

2. (Mesure de Dirac) Soit $X$ un espace mesurable, et $x$ un point de $X$. On note $\delta_x$ la mesure définie par $\delta_x(A) = 1$ si $x$ appartient à $A$, ou 0 sinon.
3. (Mesure de comptage). C'est la fonction qui à un sous-ensemble $A$ de $X$ associe son cardinal si $A$ est fini, où $+\infty$ sinon.

4. (Mesure de Lebesgue) C'est la mesure de référence sur la tribu borélienne de $\mathbf{R}^n$ qui correspond aux notions habituelles de longueur (pour $n = 1$) d'aire (pour $n = 2$), ou de volume (pour $n = 3$). Nous allons la construire au paragraphe suivant.

## 2.3 Prolongement d'une mesure

On considère un ensemble $X$, une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de $X$ et $\mu$ une mesure additive sur $(X, \mathcal{A})$. On a vu qu'il est possible d'étendre $\mathcal{A}$ en une $\sigma$-algèbre en considérant la $\sigma$-algèbre $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$. On cherche maintenant à étendre $\mu$ en une mesure $\sigma$-additive sur $\sigma(\mathcal{A})$. Pour cela, il faut au moins que $\mu$ soit $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que s'il existe une partition d'une partie $A$ de $\mathcal{A}$ en un nombre dénombrable de parties $A_1, A_2, \ldots$ de $\mathcal{A}$, on ait

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Le théorème suivant affirme la réciproque.

**Théorème de prolongement de Carathéodory 2.10** *Soit $X$ un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de $X$, et soit $\mu$ une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ qui soit $\sigma$-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire telle que pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$ et toute partition de $A$ en une famille dénombrable $(A_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on ait*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

*Alors il existe une mesure qui prolonge $\mu$ sur la $\sigma$-algèbre $\sigma(A)$. De plus, si $X$ peut s'écrire comme la réunion d'une famille dénombrable d'éléments de $A$ de mesure finie, alors ce prolongement est unique.*

*Démonstration de l'existence du prolongement.* — Pour toute partie $A$ de $X$, on définie sa *mesure extérieure* $\mu^*(A)$ en approximant $A$ par des réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}$. On pose

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ et } A_k \in \mathcal{A}\right\},$$

et on monstre successivement :

1. $\mu^*$ prolonge $\mu$ sur $\mathcal{A}$.
2. $\mu^*$ est croissante.
3. $\mu^*$ est $\sigma$-sous additive.

On définit un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de parties de $X$ sur lequel $\mu^*$ a de bonnes propriétés d'additivité en posant

$$\mathcal{B} = \Big\{A \subset X : \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) \text{ pour tout } B \subset X\Big\},$$

et on montre que

4 $\mathcal{B}$ est une algèbre de parties de $X$.

5 $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$.

6 $\mu^*$ est additive sur $\mathcal{B}$.

7 $\mathcal{B}$ est une $\sigma$-algèbre.

8 $\mu^*$ est $\sigma$-additive sur $\mathcal{B}$.

□

*Démonstration de l'unicité du prolongement.* — On considère deux prolongement $\mu_1$ et $\mu_2$ de $\mu$ à $\sigma(\mathcal{A})$, et on regarde l'ensemble $\mathcal{C}$ sur lequel ces mesures coïncident :

$$\mathcal{C} = \left\{ B \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu_1(B) = \mu_2(B) \right\}.$$

Cet ensemble contient $\mathcal{A}$, et on peut montrer qu'il est stable par réunions dénombrables croissantes, et par différences, d'où la définition :

**Définition 2.11** (classe monotone) Soit $X$ un ensemble et $\mathcal{C}$ une famille de parties de $X$. On dit que $\mathcal{C}$ est une *classe monotone* si

1. pour toute famille croissante $(C_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}$, la réunion $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ est dans $\mathcal{C}$,
2. pour tout $A \subset B$ dans $\mathcal{C}$, la différence $B \setminus A$ est dans $\mathcal{C}$.

**Lemme de classe monotone 2.12** *Soit $X$ un ensemble et $\mathcal{A}$ un famille de parties de $X$ qui est stable par intersection finie et qui contient $X$. Alors $\sigma(\mathcal{A})$ est égale à la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{A}$.*

$\mathcal{C}$ est une classe monotone. D'après le lemme de classe monotone, $\mathcal{C}$ contient $\sigma(\mathcal{A})$, ce qui conclut la preuve de l'unicité du prolongement de $\mu$. □

**Corollaire 2.13** (mesure de Lebesgue en dimension 1) *Il existe une unique mesure $\lambda$ sur la tribu des borélien des* $\mathbf{R}$ *telle que la mesure d'un intervalle $I$ soit égale à sa longueur $\ell(I)$. On l'appelle* mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

**Exemple** (ensemble triadique de Cantor).

## 2.4 Régularité et complétion d'une mesure

**Définition 2.14** (régularité) Soit $X$ un espace topologique et $\mu$ mesure définie sur une tribu $\mathcal{B}$ de $X$ contenant la tribu borélienne. On dit que $\mu$ est *régulière* si pour tout ensemble mesurable $A$, on a

$$\sup \left\{ \mu(K) : K \text{ compact, } K \subset A \right\} = \mu(A) = \inf \left\{ \mu(O) : O \text{ ouvert, } A \subset O \right\}.$$

**Remarques.**
1. La régularité exprime le fait que les ensembles boréliens peuvent être approchés de l'intérieur par des compacts, et de l'extérieur par des ouverts. De manière équivalente, pour toute partie mesurable $A$ de mesure finie et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ et un ouvert tels que $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leqslant \varepsilon$.
2. On verra au chapitre suivant que la mesure de Lebesgue est régulière.

**Proposition 2.15** (approximation par un $G_\delta$ ou un $F_\sigma$) *Soit $X$ un espace topologique et $\mu$ une mesure régulière définie sur une tribu contenant la tribu borélienne. Alors, toute partie mesurable $A$ de $X$ de mesure finie peut s'écrire sous la forme $F \cup N$ où $F$ est une réunion dénombrable de fermés (i.e. un $F_\sigma$) et $N$ un ensemble mesurable de mesure nulle. Elle peut également s'écrire sous la forme $G \setminus M$ où $G$ est une intersection dénombrable d'ouverts (i.e. un $G_\delta$) et $M$ un ensemble de mesure nulle.*

**Définition 2.16** (ensemble presque mesurable, ensemble négligeable)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Un sous-ensemble quelconque $A$ de $X$ est *presque mesurable* s'il existe deux ensembles mesurables $B_1$ et $B_2$ tels que l'on ait $B_1 \subset A \subset B_2$ et $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$.
2. Un sous-ensemble quelconque $N$ de $X$ est *négligeable* s'il existe un ensemble mesurable $B$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

**Remarques**. 1. Un ensemble presque mesurable est « coincé » entre deux ensembles mesurables de même mesure.

2. Un ensemble négligeable est presque mesurable. Réciproquement, un ensemble presque mesurable s'écrit sous la forme $A \cup N$ où $A$ est un ensemble mesurable et $N$ est un ensemble négligeable.

**Définition 2.17** (complétude) Un espace mesuré est complet si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Tout ensemble presque mesurable est mesurable.
2. Tout ensemble négligeable est mesurable.

**Théorème 2.18** (complétion d'une mesure) *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathcal{P}$ *la famille des parties presque mesurables de* $X$*. Alors* $\mathcal{P}$ *est une tribu et* $\mu$ *admet un prolongement unique* $\mu^*$ *à* $\mathcal{P}$ *tel que* $(X, \mathcal{P}, \mu^*)$ *soit un espace mesuré complet.*

**Théorème 2.19** (unicité de la complétion régulière) *Soit* $X$ *un espace topologique, soit* $\mathcal{B}(X)$ *la tribu borélienne de* $X$*, et* $\mu$ *une mesure sur* $\big(X, \mathcal{B}(X)\big)$*. Si* $X$ *est* $\sigma$*-fini et si* $\mu$ *est régulière, alors la complétion* $(X, \mathcal{P}, \mu^*)$ *définie au théorème précédent est l'unique prolongement complet de* $\big(X, \mathcal{B}(X), \mu\big)$ *en un espace mesuré régulier.*

# CHAPITRE 3

# LA MESURE DE LEBESGUE

Dans ce chapitre, on construit pour tout entier $n \geqslant 1$ la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ de $\mathbf{R}^n$, à l'aide du théorème prolongement de Carathéodory. On définit la complétion de cette tribu : la tribu $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ des ensembles *Lebesgue mesurables*. On étudie ensuite les propriétés fondamentales des boréliens et des ensembles Lebesgues mesurables : quelles sont les applications de $\mathbf{R}^n$ qui envoient un borélien sur un borélien ? un ensemble Lebesgue mesurable sur un ensemble Lebesgue mesurable ? Et comment ces applications modifient-elles la mesure ?

## 3.1 Construction de la mesure de Lebesgue en dimension $n$

**Théorème 3.1** (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$) *Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ la tribu des boréliens de $\mathbf{R}^n$. Il existe une unique mesure $\lambda_n$ sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ telle que pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbf{R}$, la mesure du pavé $I_1 \times \cdots \times I_n$ soit donné par*

$$\lambda_n(I_1 \times \cdots \times I_n) = \ell(I_1) \times \cdots \times \ell(I_n).$$

*On appelle cette mesure la* mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, au peut compléter la mesure de Lebesgue, en considérant la tribu des ensembles presque mesurables pour $\lambda_n$ :

**Définition 3.2** (tribu des ensembles Lebesgue mesurables) On appelle *tribu des ensembles Lebesgue mesurables* la tribu sur $\mathbf{R}^n$ des ensembles presque mesurables pour la mesure de Lebesgue $\lambda_n$, c'est-à-dire l'ensemble des parties $P$ de $\mathbf{R}^n$ telles qu'il existe deux boréliens $A$ et $B$ vérifiant

$$A \subset P \subset B \quad \text{et} \quad \lambda_n(B \setminus A) = 0.$$

On note $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ cette tribu et par abus de langage, on appelle aussi *mesure de Lebesgue* l'unique complétion de $\lambda_n$ à $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$.

Un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbf{R}^n$ s'écrit comme la réunion disjointe d'un borélien de $\mathbf{R}^n$ et d'un ensemble *Lebesgue négligeable*, c'est-à-dire inclus dans un borélien de mesure nulle. Il suffit donc de caractériser les ensembles Lebesgue négligeables pour reconnaître un ensemble Lebesgue mesurable.

**Lemme 3.3** (caractérisation des ensembles Lebesgue négligeables)
*Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de $\mathbf{R}^n$ qui engendre la tribu borélienne, et soit $N$ une partie de $\mathbf{R}^n$. L'ensemble $N$ est Lebesgue négligeable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ dont la somme des mesures vaut au plus $\varepsilon$.*

Pour appliquer le lemme précédent, on peut considérer pour $\mathcal{A}$ l'algèbre des pavés. On dit qu'un pavé est un *cube* s'il est le produit d'intervalles de mêmes longueurs. Remarquez qu'un pavé est une réunion dénombrables de cubes disjoints. On en déduit qu'un ensemble est négligeable si et seulement si on peut le recouvrir par une famille dénombrable de cubes disjoints dont la somme des mesures est arbitrairement petite. Remarquer que le cube $]-1,1[^n$ n'est autre que la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme infinie. On peut aussi fixer une norme quelconque sur $\mathbf{R}^n$, et en utilisant l'équivalence des normes sur $\mathbf{R}^n$ montrer que $N$ est Lebesgue négligeable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il est recouvert par une famille dénombrable de boules dont la somme des mesures vaut au plus $\varepsilon$.

**Exemples.** 1. Dans $\mathbf{R}^2$, un segment de droite est un ensemble borélien de mesure nulle.

2. Dans $\mathbf{R}^2$, une droite est un ensemble borélien de mesure nulle.
3. Dans $\mathbf{R}^2$, un cercle est un ensemble borélien de mesure nulle.

## 3.2 Propriétés fondamentales des ensembles Lebesgue mesurables

### 3.2.1 Approximation d'un borélien par des ouverts ou des fermés

**Théorème 3.4** (régularité de la mesure de Lebesgue) *La mesure de Lebesgue est régulière sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ des boréliens de $\mathbf{R}^n$, i.e. pour tout borélien $B$ de $\mathbf{R}^n$, on a*

$$\sup\Big\{\lambda_n(K) : K \textit{ compact, } K \subset B\Big\} = \lambda_n(B) = \inf\Big\{\lambda_n(O) : O \textit{ ouvert, } B \subset O\Big\}.$$

**Corollaire 3.5** (approximation par un $G_\delta$ ou un $F_\sigma$) *Tout borélien de $\mathbf{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $F \cup N$ où $F$ est une réunion dénombrable de fermés et $N$ un borélien de mesure nulle. Il peut également s'écrire sous la forme $G \setminus M$ où $G$ est une intersection dénombrable d'ouverts et $M$ un borélien de mesure nulle.*

**Corollaire 3.6** *La mesure de Lebesgue est régulière sur la tribu $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ des ensembles Lebesgue mesurables. L'espace $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$ est l'unique complétion régulière de $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$.*

### 3.2.2 Applications préservant les ensembles boréliens

**Lemme 3.7** *Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de $\mathbf{R}^n$ qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, et soit $f$ une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui permute les éléments de $\mathcal{A}$. Alors l'image par $f$ d'un borélien de $\mathbf{R}^n$ est un borélien de $\mathbf{R}^n$.*

**Corollaire 3.8** (les homéomorphismes préservent les boréliens) *L'image d'un borélien de $\mathbf{R}^n$ par une bijection bicontinue de $\mathbf{R}^n$ est un borélien.*

**Exemples.** 1. L'image d'un borélien par une translation est un borélien.

2. L'image d'un borélien par une rotation est un borélien.
3. L'image d'un borélien par une isométrie est un borélien.
4. De même pour une homothétie $\alpha.id$ de rapport non nul.

### 3.2.3 Applications préservant les ensembles Lebesgue mesurables

**Définition 3.9** (application lipschitzienne) Soit $X$ une partie de $\mathbf{R}^n$, $f$ une application de $X$ dans $\mathbf{R}^n$ et $\| \ \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$. On dit que $f$ est lipschitzienne s'il existe un nombre réel

$k > 0$ tel que pour tout $x$ et tout $y$ de $X$, on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Comme toute les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes, cette définition ne dépend pas de la norme choisie : si $f$ est lipschitzienne pour la norme $\| \ \|$, elle l'est pour toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$.

**Lemme 3.10** (L'image lipschitzienne d'un Lebesgue négligeable est Lebesgue négligeable) *Soit $N$ un borélien de $\mathbf{R}^n$ de mesure nulle et soit $f$ une application lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Alors $f(N)$ est Lebesgue négligeable, i.e. inclus dans un borélien de mesure nulle.*

**Exemple**. Une droite de $\mathbf{R}^2$ est de mesure nulle, un plan de $\mathbf{R}^3$ est de mesure nulle, et plus généralement, un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ de dimension au plus $n-1$ est de mesure nulle.

**Théorème 3.11** (l'image lipschitzienne d'un Lebesgue mesurable est Lebesgue mesurable) *Soit $L$ une partie Lebesgue mesurable de $\mathbf{R}^n$ et soit $f$ une application lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Alors $f(L)$ est aussi Lebesgue mesurable.*

**Remarques**.
1. Le résultat est faux si les espaces de départ et d'arrivée n'ont pas la même dimension : considérer par exemple la projection sur la première coordonnée de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
2. Il est également faux pour une application seulement continue. (voir exercice)
3. Le résultat reste vrai pour une application localement lipschitzienne, et en particulier pour une application de classe $C^1$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ (voir exercice).

## 3.3 Propriétés fondamentales de la mesure de Lebesgue

### 3.3.1 Action des translations et des homothéties

**Proposition 3.12** *Soit $\tau$ une translation de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, et $B$ un borélien de $\mathbf{R}^n$. Alors $\tau(B)$ est un borélien et*

$$\lambda_n\big(\tau(B)\big) = \lambda_n(B).$$

**Proposition 3.13** *Soit $h$ l'homothétie de $\mathbf{R}^n$ de rapport $\alpha > 0$, et $B$ un borélien de $\mathbf{R}^n$. Alors $h(B)$ est un borélien et*

$$\lambda_n\big(h(B)\big) = \alpha^n \lambda_n(B).$$

### 3.3.2 Action des isométries

**Lemme 3.14** (réduire les distances réduit le volume) *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, une norme $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^n$ et $f$ une application 1-lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ pour la norme $\| \ \|$ (on dit que $f$ est une* contraction*). Alors $f(\Omega)$ est un ensemble Lebesgue mesurable et*

$$\lambda_n\big(f(\Omega)\big) \leqslant \lambda_n(\Omega).$$

**Théorème 3.15** (les isométries préservent le volume) *Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$ et $f$ une isométrie de $\mathbf{R}^n$ (i.e. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x$ et $y$). Alors, pour tout ensemble Lebesgue mesurable $B$ de $\mathbf{R}^n$, $f(B)$ est mesurable, et on a*

$$\lambda_n\big(f(B)\big) = \lambda_n(B).$$

**Remarque**. Une isométrie de $\mathbf{R}^n$ pour la norme euclidienne $\| \ \|_2$ est une application affine de la forme $f(x) = Ax + b$ où $A$ est une matrice orthogonale (voir exercice).

**Exemple**. Aire d'un triangle dans $\mathbf{R}^2$.

### 3.3.3 Action des applications linéaires

Soit $f$ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ et soit $A$ sa matrice dans la base canonique. On a donc $f(x) = Ax$. On note $(A_1, \dots, A_n)$ lest $n$ vecteurs colonnes de la matrice $A$, et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $x$. Soit $C$ le cube unité $[0,1]^n$. Son image par $f$ est donné par

$$f(C) = \Big\{ Ax : x \in [0,1]^n \Big\} = \Big\{ A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n : (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \Big\}.$$

$f(C)$ est donc le parallélépipède construit sur les vecteurs colonnes de $A$. C'est un fermé de $\mathbf{R}^n$, donc mesurable. On va montrer que sa mesure de Lebesgue $\lambda_n(f(C))$ correspond au volume algébrique $|\det A|$, et plus généralement :

**Théorème 3.16** (action des applications linéaires) *Soit $f$ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, et $A$ sa matrice dans la base canonique. Si $B$ est un borélien de $\mathbf{R}^n$, alors $f(B)$ est mesurable et sa mesure vaut*

$$\lambda_n\Big(f(B)\Big) = |\det A| . \lambda_n(B)$$

**Remarques**.

1. Si $B$ est le cube unité $[0,1]^n$, on trouve que le volume du parallélépipède contruit sur $A$ vaut $|\det A|$.
2. Si $f$ est une isométrie euclidienne, $A$ est une matrice orthogonale et son déterminant vaut 1 ou $-1$. On retrouve le fait qu'une isométrie pour la norme $\| \|_2$ préserve le volume.