Gegeben $\quad x'(t) = f(t, x(t))$

$x(t_0) = x_0$

Oft gefragt: kann diese AWA mit der Methode "Separation der Var." oder "Variation der Konstanten" oder keiner von beiden gelöst werden?

Grundsätzlich

- Separation der Var.
  wenn $f(t, x(t)) = h(t)\, g(x(t))$
- Variation der Konstanten
  wenn $f(t, x(t)) = a(t)\, x(t) + b(t)$

Bsp:
$$x'(t) + 1/t\, x(t) = \sqrt{t^3}$$
$$x(1) = 3$$

$\Rightarrow \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 3$

& $\quad x'(t) + 1/t\, x(t) = \sqrt{t^3}$

$\Leftrightarrow \quad x'(t) = \sqrt{t^3} - 1/t\, x(t)$

Vgl mit Strukturen von f oben

$f(t, x(t)) = h(t)\, g(x(t))$?

$f(t, x(t)) = a(t)\, x(t) + b(t)$ ✓

für $a(t) = -1/t$ & $b(t) = \sqrt{t^3}$

Lsg mit "Var der Konst." möglich

Bsp 2

$$x'(t) = \exp(x(t)+t)$$
$$x(0) = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$x'(t) = \exp(x(t)+t) = \exp(x(t))\exp(t)$$

$\Rightarrow$ $f(t, x(t)) = h(t)\, g(x(t))$ passt mit

$$h(t) = \exp(t) \quad \& \quad g(x(t)) = \exp(x(t))$$

$\Rightarrow$ Lsg mit "Separation der Var" möglich

Bsp:

$$x'(t) = \sqrt{x(t)+t^2}$$
$$x(0) = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\sqrt{x(t)+t^2}$ weder von der Struktur

$$f(t, x(t)) = h(t)\, g(x(t))$$

noch von

$$f(t, x(t)) = a(t)\, x(t) + b(t)$$

$\Rightarrow$ nicht lösbar mit "Sep der Var" oder "Var der Konst"

Lsg mit Sep der Var :

Gegeben: $x'(t) = h(t)\, g(x(t))$
$x(t_0) = x_0$

Idee:

Interpretiere $x'(t) = \dfrac{d\, x(t)}{dt}$, dann

$$\frac{d\, x(t)}{dt} = h(t)\, g(x(t)) \quad \Big| \cdot \frac{dt}{g(x(t))}$$

$$\text{"}\Longleftrightarrow\text{"} \quad \frac{1}{g(x(t))}\, d\,x(t) = h(t)\, dt$$

$$\text{"}\Longleftrightarrow\text{"} \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{g(x(s))}\, d\,x(s) = \int h(s)\, ds + C$$

Benötige also

1) $\displaystyle\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{g(x(s))}\, d\,x(s)$

2) $\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$

C ergibt sich aus Anfangswerten und Lsg aus "Umkehrung" der Integration

Vorgehen: 1) berechne $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds$

2) setze $\phi(x(t)) := \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds$

3) Berechne $H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$

4) setze gleich:

$$\phi(x(t)) = H(t) \quad \Big| \ \underset{\text{Umkehrfkt v. } \phi}{\phi^{-1}(\cdot)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\phi^{-1}(\phi}_{= Id}(x(t))) = \phi^{-1}(H(t))$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(t) = \phi^{-1}(H(t))$$

Also ist Lösung gegeben durch

$$x(t) = \phi^{-1}(H(t))$$

<u>Bsp</u>: $x'(t) = \frac{2t}{t^2+1} x(t)^2$

$x(0) = 1/2$

$\Rightarrow \quad t_0 = 0 \qquad x_0 = 1/2$

für $h(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ & $g(x(t)) = x(t)^2$

ist $\frac{2t}{t^2+1} x(t)^2 = h(t)\, g(x(t))$

$\longrightarrow$ Lsg mit Sep der Var :

1) berechne $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{1/2}^{x(t)} \frac{1}{s^2}\, ds = \left[-\frac{1}{s} \right]_{1/2}^{x(t)}$$

$$= -\frac{1}{x(t)} - \left(-\frac{1}{(1/2)} \right)$$

$$= 2 - 1/x(t)$$

2) defeniere $\phi(x(t)) := \int_{x_0} \frac{1}{g(s)}\, ds$:

also $\phi(x(t)) := 2 - 1/x(t)$

Bestimme ϕ^{-1} (Auflösen nach $x(t)$):

Sei $y := \phi(x(t))$, dann

$$y = 2 - 1/x(t)$$

$$\Leftrightarrow -(y-2) = 1/x(t)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y-2} = x(t)$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x(t)) = -\left(\frac{1}{x(t)-2}\right)$$

3) Berechne $H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$:

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{2s}{s^2+1}\,ds$$

$$= 2\int_{0}^{t} \frac{s}{s^2+1}\,ds$$

$$= 2 \int_0^t \frac{1}{s^2+1} \cdot s \, ds$$

Lin. Subst.:

sei $z(s) := s^2+1 \implies \frac{dz}{ds} = 2s$

$$\implies ds = \frac{dz}{2s}$$

$$\implies 2 \int_0^t \frac{1}{s^2+1} \cdot s \, ds$$

$$= \cancel{2} \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{z} \cdot \cancel{s} \, \frac{dz}{\cancel{2}\cancel{s}}$$

$$= \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{z} \, dz$$

$$= \Big[\ln(z) \Big]_{\dots}^{\dots}$$

$$\overset{z = s^2+1}{=} \Big[\ln(s^2+1) \Big]_{s=0}^{s=t}$$

$$= \ln(t^2+1) - \ln(1)$$

$$= \ln(t^2+1)$$

Also $H(t) = \ln(t^2+1)$

4) Lösung der AWA ist $x(t) = \phi^{-1}(H(t))$:

$$x(t) = \phi^{-1}(H(t))$$

$$= -\left(\frac{1}{H(t)-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2-H(t)}$$

$$= \frac{1}{2-\ln(t^2+1)}$$

Check :

$$x(0) = \frac{1}{2-\ln(1)} = 1/2$$

$$x'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(2-\ln(t^2+1)\right)^{-1}$$

$$= \cancel{-}\left(2-\ln(t^2+1)\right)^{-2} \cdot \cancel{-}\left(\frac{1}{t^2+1}\, 2t\right)$$

$$= \frac{2t}{t^2+1}\left(2-\ln(t^2+1)\right)^{-2}$$

$$= \frac{2t}{t^2+1}\left(\frac{1}{2-\ln(t^2+1)}\right)^2$$

$$= \frac{2t}{t^2+1}\,(x(t))^2$$

Variation der Konstanten

gegeben $\quad x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$

$x(t_0) = x_0$

Idee: Betr. hom AW $\quad (b(t) \equiv 0)$

Es gilt: $\hat{x}(t) = x_0\, e^{A(t)}$, mit $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

löst $\quad \left.\begin{aligned} \hat{x}'(t) &= a(t)\,\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$ hom. AWA

denn $\quad \hat{x}(t_0) = x_0\, e^{A(t_0)} = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,ds}$

$= x_0\, e^{0}$

$= x_0$

und

$$\hat{x}'(t) = x_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{A(t)}\right) = x_0\, e^{A(t)}\, A'(t)$$

$$= A'(t)\, \underbrace{x_0\, e^{A(t)}}_{\hat{x}(t)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \quad \hat{x}(t)$$

$$= a(t)\,\hat{x}(t)$$

Betrachte nun

Die Konstante x_0 der Lsg der homogenen AWA wird variiert → "Variation der Konstanten"

$$x(t) := c(t)\, e^{A(t)}$$

Für eine unbekannte Fkt c

Dann ist
$$x(t_0) = c(t_0)\, e^0 = c(t_0)$$

Es gilt
$$\begin{aligned} x'(t) &= c'(t)\, e^{A(t)} + c(t)\, e^{A(t)} a(t) \\ &= c'(t)\, e^{A(t)} + x(t)\, a(t) \\ &= a(t)\, x(t) + \underbrace{c'(t)\, e^{A(t)}}_{\overset{!}{=}\, b(t)} \end{aligned}$$

D.h. $x(t) := c(t)\, e^{A(t)}$

löst die AWA

$$x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

wenn $b(t) = c'(t)\, e^{A(t)}$

und $c(t_0) = x_0$

Dies gilt für

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds + x_0$$

denn $c(t_0) = x_0$

& $c'(t) = b(t)\, e^{-A(t)}$

$\iff c'(t)\, e^{A(t)} = b(t)$

D.h. die Lsg der AWA

$$x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

lautet

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds + x_0 \right) e^{A(t)}$$

Für $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

<u>Beispiel</u> Gegeben:

$$x'(t) = -1/t\; x(t) + t^2 + 1$$
$$x(1) = 1$$

Lösc

Es ist $t_0 = 1$, $x_0 = 1$, außerdem

ist für $a(t) = -1/t$ & $b(t) = t^2+1$

$$x'(t) = -1/t \, x(t) + t^2 + 1$$
$$= a(t)\, x(t) + b(t)$$

$\Rightarrow$ Lösung mit Var. der Konstanten

Lsgsformel:

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds + t_0 \right) e^{A(t)}$$

1) Berechne $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = \int_1^t -\frac{1}{s}\, ds = -\ln(t)$$

2) Berechne $e^{A(t)}$:

$$e^{A(t)} = e^{-\ln(t)} = \frac{1}{e^{\ln(t)}} = \frac{1}{t}$$

3) <u>Berechne $e^{-A(t)}$</u>

$$e^{-A(t)} = \frac{1}{e^{A(t)}} = \frac{1}{\frac{1}{t}} = t$$

4) <u>Berechne $\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds$</u>

$$\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds = \int_1^t (s^2+1)\cdot s \; ds$$
$$= \int_1^t s^3 + s \; ds$$
$$= \int_1^t s^3\, ds + \int_1^t s \; ds$$
$$= 1/4\, t^4 - 1/4 + 1/2\, t^2 - 1/2$$
$$= 1/4\, t^4 + 1/2\, t^2 - 3/4$$

5) <u>Zusammensetzen</u>

$$x(t) = \Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds}_{= 1/4\, t^4 + 1/2\, t^2 - 3/4} + \underbrace{x_0}_{= 1} \Big)\, \underbrace{e^{A(t)}}_{= 1/t}$$

$$= 1/t \left(1/4\, t^4 + 1/2\, t^2 - 3/4 \right) + 1/t$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{4} t^3}} + \tfrac{1}{2} t + \left(-\tfrac{3}{4} + 1\right) \frac{1}{t}$$

← Dominanter Term

wegen $t^3 \to \infty$ für $t \to \infty$ gilt

folgt $x(t) \to \infty$ für $t \to \infty$

homogene lineare Systeme

Aufgabe meist :

Gegeben $x'(t) = A\,x(t) \quad t \geq 0$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Berechne die allg. Lösung

Oder

Gegeben
$$x'(t) = A\,x(t) \quad t \geq 0$$
$$x(t_0) = x_0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$. Berechne die Lösung.

Lösung über Eigenwerte und Eigenvektoren:

Sei λ EW & v zugeh. EV von A, d.h.

$$Av = \lambda v$$

dann gilt: $x(t) = e^{\lambda t} v$ löst

$$x'(t) = A x(t)$$

denn

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = \lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t}$$
$$= A e^{\lambda t} v$$
$$= A x(t)$$

Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von A & v_i zu λ_i $(i = 1, \dots, n)$ zugeh. EV. Sind die EV linear unabhängig dann nennt man

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$
$$= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, .., n$ die allg. Lsg von

$$x'(t) = A x(t) \qquad t \geq 0$$

Bem: Sind die EW einer Matrix paarweise verschieden, gilt also $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i, j = 1, .., n$ $i \neq j$ dann sind alle EV von A linear unabhängig

Bsp Berechne die allg Lsg $\bar{x}(t)$ von

$$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) \quad t \geq 0$$

Berechne EW:

EW sind Lsg der Gl $\det(A - \lambda I) = 0$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Also $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\iff \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

MF / P-Q Formel

$$\implies \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = \begin{cases} -1 + 2i \\ -1 - 2i \end{cases}$$

Berechne EV: EV v_i löst

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$\iff (A - \lambda_i) v_i = 0$$

$\underline{i=1}$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1-(-1+2i) & 1 \\ -4 & -1-(-1+2i) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}$$

Damit $v_i \neq 0$ EV zu λ_i muss v_i $(A-\lambda_i I)v_i = 0$ lösen. D.h. $A-\lambda_i I$ kann nicht vollen Rang haben $\Rightarrow$ Eine Var frei wählbar

$\Rightarrow$ Löse $\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

wähle $x_2 = 1$:

$$-4x_1 - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{2i}{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\tfrac{1}{2} i$$

also $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{i=2}$

wegen $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ lautet v_2: $v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{Betr.}}$

$$e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{(-1+2i)t} v_1$$
$$= e^{-t} e^{2it} v_1$$
$$= e^{-t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right)\left(\operatorname{Re}(v_1) + i\operatorname{Im}(v_1)\right)$$
$$= e^{-t}\Big[\cos(2t)\operatorname{Re}(v_1) - \sin(2t)\operatorname{Im}(v_1) + i\left(\sin(2t)\operatorname{Re}(v_1) + \cos(2t)\operatorname{Im}(v_1)\right)\Big]$$

Nach VL ergibt sich die allg. Lsg aus Real & Imaginärteil:

$$x(t) = \alpha_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 t} v_1) + \alpha_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 t} v_1)$$
$$= \alpha_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Bem:

Komplexe EW treten immer als komplex konjugierte Paare auf. D.h.: Ist $\lambda = a+ib$, $b \neq 0$ ein EW von $A \Rightarrow \overline{\lambda} = a - ib$ ist automatisch auch EW v. A.

Gleiches gilt für Eigenvektoren:

Ist $v \in \mathbb{C}^n$, $v = u + ip$, $u, p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ zugeh. EV zu λ, dann ist $\overline{v} = u - ip$ automatisch zu $\overline{\lambda}$ zugehöriger EV

Ist zusätzlich zum lin System

$$x'(t) = A\,x(t) \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ein Anfangswert

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

gegeben, muss die allg. Lsg

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$
$$= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

berechnet und das Gleichungssystem:

$$x(0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1, & v_2 & \dots, & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = x_0$$

gelöst werden.

__Bsp:__ Berechne die Lsg von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad t > 0$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allg. Lsg lautet (s.o)

$$x(t) = \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1/2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1/2 \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Damit $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, müssen α_1, α_2

$$\alpha_1 e^{-0} \begin{pmatrix} 1/2 \sin(2\cdot 0) \\ \cos(2\cdot 0) \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-0} \begin{pmatrix} -1/2 \cos(2\cdot 0) \\ \sin(2\cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 e^{-0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{0} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Es gilt

$$\alpha_1 \underbrace{e^{-0}}_{=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \underbrace{e^{0}}_{=1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $\alpha_1 = 1$ & $\alpha_2 = -2$

Die Lsg von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad t > 0$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lautet also

$$\bar{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1/2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} - 2\, e^{-t} \begin{pmatrix} -1/2 \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Verhalten für $t \to \infty$: Es gilt $|\sin(2t)| \leq 1$

& $|\cos(2t)| \leq 1$ sowie $e^{-t} \to 0$ für $\to \infty$

d.h. $\bar{x}(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \to \infty$

Lineare Diffgl. höherer Ordnung

Aufgabe meist :

Gegeben
$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = x_1$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Lsg?

Betrachte: Sei $z(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$$

Nun ist:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x''(t) = -a_1 \underbrace{x'(t)}_{= z_2(t)} - a_0 \underbrace{x(t)}_{= z_1(t)}$$

bzw in z:

$$x''(t) = -a_1 z_2(t) - a_0 z_1(t)$$

Also ist

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ -a_1 z_2(t) - a_0 z_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_2(t) \\ -a_0 z_1(t) - a_1 z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} z(t)$$

Das ist hom. lin System.

Löse das wie oben, erhalte

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = z(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$
$$= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

mit λ_1, λ_2 EW von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$

& v_1, v_2 zugeh. EV

Die Lsg der Gl.

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = x_1$$

ist dann $z_2(t)$, denn $z_2'(t) = x''(t)$.

Bem:

Die EW von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ lösen

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a_0 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\lambda(-a_1 - \lambda) + a_0 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

also $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$

D.h. die allg. Lsg von

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} z(t)$$

lautet

$$z(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

Da wir zur Lösung von

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = x_1$$

allerdings nur die zweite Komponente der Lösung des lin Systems benötigen, und bei der Berechnung der Eigenvektl. von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ die zweiten Komponenten der Eigenvektoren zu 1 normiert werden kann (s. Bsp), lautet die allg Lösung von

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 :$$

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

mit $$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

und die Lsg zu

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = x_1$$

ergibt sich aus der Lösung des lin Gl. Sys:

$$\overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{= x(0)} \overset{!}{=} x_0$$

$$\underbrace{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}_{= x'(0)} \overset{!}{=} x_1$$

Vorgehen zur Berechnung der allg. Lösung einer DGL zweiter Ordnung der Form

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

i) Berechne NS der Gleichung

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

ii) allg Lsg lautet dann

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t},$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Ist die Lösung von

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = x_1$$

gefragt, berechne allg Lsg wie oben angegeben und berechne zusätzlich α_1, α_2 als Lösungen von

$$\overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{= x(0)} = x_0$$

$$\underbrace{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2}_{= x'(0)} = x_1$$

Ist hingegen nach der (allg.) Lsg einer inhomogenen Dgl höherer Ordnung der Form

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b$$

gefragt, muss zusätzlich zu obigem Schema eine partikuläre Lsg $x_p(t)$ berechnet werden. Dabei gilt für Dgl der Form

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b$$

allgemein: $x_p(t) = \frac{b}{a_0}$ falls $a_0 \neq 0$

Die allg. Lsg der inhom. Gl ist dann geg durch

$$x(t) = x_p(t) + \underbrace{\alpha_1 x^1(t) + \alpha_2 x^2(t)}_{\text{allg. Lsg der hom. Gl.}}$$

Beispiel: $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 2$

i) allg Lsg

ii) Lsg für $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$

i) Berechne zunächst allg Lsg der homog. Gl.

Berechne NS der Gleichung

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Für $a_1 = 2$, $a_0 = -3$ ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm \sqrt{4} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ allg Lsg homog. Gl $x(t) = \alpha_1 e^{t} + \alpha_2 e^{-3t}$,

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Partikuläre Lsg $x_p(t) = \frac{b}{a_0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ allg Lsg inhomog. Gl : $\bar{x}(t) = x(t) + x_p(t)$

$$= \alpha_1 e^{t} + \alpha_2 e^{-3t} - 2/3$$

ii) Lösung zu Anfangsdaten : $\bar{x}(0) = 1$, $\bar{x}'(0) = 1$

Es gilt

$$\bar{x}'(t) = \alpha_1 e^{t} - 3\alpha_2 e^{-3t}$$

d.h. $\bar{x}'(0) = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 3\alpha_2 = 1$$

und $\bar{x}(0) = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 - 2/3 = 1$$

hvg. müssen α_1, α_2 also

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 = 1$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 5/3$$

erfüllen. Dies gilt für $\alpha_1 = 3/2$ & $\alpha_2 = 1/6$

$\Rightarrow \quad \bar{x}(t) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{2}{3}$

löst $\quad x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 2$

$$x(0) = 1,$$
$$x'(0) = 1$$