$$\text{Mathe II} = \begin{cases} \text{lin Algebra} \\ \text{Optimierung} \\ \text{Diff.Gl} \end{cases}$$

Zsmh lin Alg & DGl : u.a. EW & EV

bei zB für $x'(t) = A\,x(t) + b$

Zsmh lin Alg & Optim. : u.a. Lsg von LGS

Berechnung Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte einer Matrix A sind Lösungen der Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

I ist Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

wobei $\lambda = 0$ auch als Lsg zulässig ist

zu jedem Eigenwert λ gehört immer mindestens ein Eigenvektor $v_\lambda \neq 0$. v_λ ist definiert als Lösung der Gleichung

$$A v_\lambda = \lambda v_\lambda$$

D.h. zur Berechnung der EW muss bekannt sein wie Det berechnet werden

Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\text{ist} \quad \det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Für $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

ergibt sich $\det(B)$ aus

<u>Regel v. Sarrus</u>

Erweitern B mit ersten zwei Spalten:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det(B) = + b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}$$
$$- b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}$$

Für EW λ von A bzw. B berechne daher

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

bzw

$$\det(B-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

und löse

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

bzw

$$\det(B-\lambda I) = 0$$

nach λ auf

<u>Bsp</u>: Bestimme die EW & EV von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) - 4\cdot 1$$

$$= (-1-\lambda)^2 - 4$$

$$= 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Löse $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

EV: Berechne Lsg $v^1, v^2 \neq 0$ von

$$A v^i = \lambda_i v^i$$

i = 1: $\quad A v^1 = \lambda v^i$

$$\Leftrightarrow \quad A v^1 - \lambda_1 v^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_1 I) v^1 = 0$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1-\lambda_1 & 4 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \overset{\lambda_1 = 1}{=} \begin{pmatrix} -1-1 & 4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} -2v_1^1 + 4v_2^1 &= 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \\ v_1^1 - 2v_2^1 &= 0 \quad \hookleftarrow + \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} -v_1^1 + 2v_2^1 &= 0 \\ 0v_1^1 + 0v_2^1 &= 0 \end{aligned}$$

$rg(A-\lambda_1 I | b) = rg(A-\lambda_1 I) < 2$

$\Rightarrow$ ∞ viele Lsg

$\Rightarrow$ wähle $v_2 = 1$

Mit $v_2^1 = 1$ lautet 1. Zeile

$$-v_1^1 + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow v_1^1 = 2$$

$\Longrightarrow$ $v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu λ_1

denn $A v^1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2-1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 v^1$$

Analog folgt $v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu λ_2

Bem: Aus $Av = \lambda v$ kann bei gegebenem

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \& \text{ EV } \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

zu λ auch λ berechnet werden:

$$Av = \lambda v \iff \left.\begin{aligned} a_{11} v_1 + \dots + a_{1n} v_n &= \lambda v_1 \\ a_{21} v_1 + \dots + a_{2n} v_2 &= \lambda v_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} v_1 + \dots + a_{nn} v_n &= \lambda v_n \end{aligned}\right\} (LGS\,I)$$

Da v nach Vor für EV $\neq 0$ sein muss, ist mind. eine Komponente von v nicht 0. Sei dies der Fall für v_k. Dann lautet die k-te Gleichung von (LGS I)

$$a_{k1} v_1 + \dots + a_{kn} v_n = \lambda v_k \qquad \Big| \cdot 1/v_k$$

$$\overset{v_k \neq 0}{\iff} \quad \underbrace{\frac{a_{k1}}{v_k} v_1 + \dots + \frac{a_{kn}}{v_k} v_n}_{} = \lambda$$

alle Werte auf dieser Seite sind bekannt und damit λ

Betr. nun $x'(t) = A\,x(t) + b$ I.1
$x(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ I.2 $\Big\}$ (I)

mit $A = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ von oben und $b = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

I ist inhomogenes lin System v. DGln

zur Lsg $x(t)$ benötigt man

- allg. Lsg des hom. Systems: Hier
  $x^h(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v^2$
  für λ_1, λ_2 EW v. A & v^1, v^2 zugeh EV
- partikuläre Lösung $x^p(t)$:
  d.h. eine Lsg von $x'(t) = A\,x(t) + b$

Dann ist $x(t) = x^h(t) + x^p(t)$

Lösung von (I) wenn

$$x(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\iff$ $x^h(0) + x^p(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\iff$ $\alpha_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} v^1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} v^2 + x^p(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\iff$ $\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + x^p(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

gilt. v^1, v^2 bereits bekannt (s.o.)

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ben. also noch $x^p(t)$ & α_1, α_2

zu $x^p(t)$:

Nehme an $x^p(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (zeitunabh.)

dann gilt $x^{p\prime}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \, x^p(t) + b$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b$$

A, b v. oben

$$\Longleftrightarrow -\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 3 &= -x_1 + 4x_2 \\ 0 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

dieses LGS hat eind. Lsg $(x_1, x_2) = (1, 1)$

also löst $x^p(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x'(t) = A\,x(t) + b$$

Damit ist

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + x^p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

löse nun

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat Lsg $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$

$$\Rightarrow x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v^2 + x^p(t)$$

$$= 1/2\, e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2\, e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist Lösung von (I)

Lösen von skalaren DGl

Gegeben $\quad x'(t) = f(t, x(t))$

$x(t_0) = x_0$

Grundsätzlich

- Separation der Var.
  wenn $f(t, x(t)) = h(t)\, g(x(t))$
- Variation der Konstanten
  wenn $f(t, x(t)) = a(t)\, x(t) + b(t)$

<u>Bsp</u>:

$$x'(t) = \frac{x(t)^2 - 1}{a\, x(t)} \qquad a \neq 0$$

$$x(0) = 2$$

Es gilt

$$\frac{x(t)^2 - 1}{a\, x(t)} = \frac{1}{a}\, x(t) - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x(t)}$$

$$= 1/a \left(x(t) - 1/x(t) \right)$$

Für $h(t) = 1/a$ & $g(x(t)) = x(t) - 1/x(t)$

ist $1/a \left(x(t) - 1/x(t) \right) = h(t)\, g(x(t))$

$\Rightarrow$ Sep. der Var.

Für Sep der Var benötige

1) $\phi(x(t)) := \int_{t_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)} \, ds$

2) $H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s) \, ds$

3) Setze $x(t) = \phi^{-1}(H(t))$

4) Probe

1) Es ist $t_0 = 2$ also

$$\int_2^{x(t)} \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_2^{x(t)} \frac{1}{\underbrace{s - 1/s}_{= \frac{1}{\frac{s^2-1}{s}}}} \, ds$$

$$= \int_2^{x(t)} \frac{s}{s^2 - 1} \, ds$$

NR $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} \ln(x^2-1)\right)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \, \frac{1}{x^2-1} \, \cancel{2}x$

$= \frac{x}{x^2-1}$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(s^2 - 1) \right]_2^{x(t)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x(t)^2 - 1)$$

$$- 1/2 \ln(3)$$

2) $t_0 = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{a}\, ds$

$= \frac{1}{a} t$

Setze $\phi(x(t)) := \int_2^{x(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds$

$= \frac{1}{2} \ln(x(t)^2 - 1) - 1/2 \ln(3)$

Berechne $\phi^{-1}(x(t))$ für Punkt 3) :

$$y = \frac{1}{2}\left(\ln(x(t)^2 - 1) - \ln(3)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln(x(t)^2 - 1) - \ln(3)$$

$$2y = \ln\left(\frac{x(t)^2 - 1}{3}\right)$$

$$e^{2y} = \frac{x(t)^2 - 1}{3}$$

$$\boxed{3e^{2y} + 1 = x(t)^2}$$

hat zwei Lösungen!

$$\Rightarrow \phi_{\pm}^{-1}(x(t)) = \pm\sqrt{3e^{2x(t)} + 1}$$

4) Probe

Sei $\phi_+^{-1}(H(t)) := \sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}$

$\phi_-^{-1}(H(t)) := -\sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}$

dann $\phi_+^{-1}(H(0)) = \sqrt{3 \cdot e^0 + 1} = 2 = x_0$

$\phi_-^{-1}(H(0)) = -\sqrt{3 \cdot e^0 + 1} = -2 \neq x_0$

und für $x(t) = \phi_+^{-1}(H(t)) = \sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}$

gilt $x'(t) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}} \cdot \cancel{6}^{3}\, \frac{1}{a} e^{2\,1/a\,t}$

$$= \frac{3\, 1/a\, e^{2\,1/a\,t}}{\sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}} = \frac{\frac{1}{a}\sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}^{\,2} - 1}{\sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}}$$

$$= \frac{x(t)^2 - 1}{a\; x(t)} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Lsg der AWA ist $x(t) = \phi_+^{-1}(H(t)) = \sqrt{3e^{2\,1/a\,t} + 1}$

Lösung einer AWA mit Var. der Konst

Gegeben $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

$x(0) = x_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Lösungsformel :} \\ \qquad x(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right) \\ \text{für} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \end{array}}$$

Beispiel:

$x'(t) = \frac{3}{t} x(t) + t^3$

$x(1) = 2$

Dann gilt für $f(t, x(t)) := \frac{3}{t} x(t) + t^3$

$f(t, x(t)) = a(t)x(t) + b(t)$ wenn $a(t) := \frac{3}{t}$

und $b(t) := t^3$ gesetzt wird

Benötige zur Lösung

1) $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = \int_1^t \frac{3}{s}\,ds$

$= 3\int_1^t \frac{1}{s}\,ds = 3\ln(t)$

$\Rightarrow \quad e^{A(t)} = e^{3\ln(t)} = \underbrace{e^{\ln(t)}}_{=t}\underbrace{e^{\ln(t)}}_{=t}\underbrace{e^{\ln(t)}}_{=t}$

$= t^3$

$\text{d} \quad e^{-A(t)} = \frac{1}{e^{A(t)}} = \frac{1}{t^3}$

2) $\int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{-A(s)}\,ds$

$= \int_1^t \cancel{3s^3}\,\frac{1}{\cancel{s^3}}\,ds$

$= \int_1^t 1\,ds = t-1$

3) Zusammensetzen:

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t)}}_{=t^3} \Big(\underbrace{t_0}_{=2} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds}_{=t-1} \Big)$$

$$= t^3 \cdot 2 + t^3 (t-1)$$

$$= t^4 + t^3$$

<u>Bem</u>: Beim Lösen mittels "Variation der Konstanten" kann im Gegensatz zur "Separation der Var" auf eine Probe verzichtet werden.

<u>Optimierung</u>

<u>Ansatz v. Lagrange</u> für Optimierungsprobleme der Form

$$\text{min./max.} \quad f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{udN.} \quad g_j(x) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, \ell$$

Vorgehen 1) Stelle Lagrangefkt auf

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j g_j(x)$$

2) Löse notw Bed : $\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$

3) Überprüfe hinr. Bed
wenn nach Art der lok. Extr.
gefragt wird

Bsp :

$$\max \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 \qquad x_i > 0$$

udN $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$

1) Lagrange nur für NB der Form $g(x) = 0$
setze also $\quad g(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3 - 4$

Dann ist

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1^2 x_2 x_3 + \lambda (x_1 + x_2 + x_3 - 4)$$

2) Berechne $\nabla \mathcal{L}(\lambda, x)$ ∂

Löse notw. Bed $\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$

Es ist

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\lambda, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{L}(\lambda, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{L}(\lambda, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{L}(\lambda, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - 4 \\ 2 x_1 x_2 x_3 + \lambda \\ x_1^2 x_3 + \lambda \\ x_1^2 x_2 + \lambda \end{pmatrix}$$

Löse notw. Bed $\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 4 &= 0 && \text{I} \\ 2 x_1 x_2 x_3 + \lambda &= 0 && \text{II} \\ x_1^2 x_3 + \lambda &= 0 && \text{III} \\ x_1^2 x_2 + \lambda &= 0 && \text{IV} \end{aligned}$$

Aus III folgt $\lambda = -x_1^2 x_3$

aus IV folgt $\lambda = -x_1^2 x_2$

Also $-x_1^2 x_3 = -x_1^2 x_2 \quad \Big| \cdot -\frac{1}{x_1^2} \quad (x_1 > 0)$

$\Longleftrightarrow \quad x_3 = x_2$

Bem: Oft gesehener Lösungsweg in Klausuren

$$x_1^2 x_3 = -\lambda$$

$$x_1^2 x_2 = -\lambda$$

$$\iff \frac{x_1^2 x_3}{x_1^2 x_2} = 1$$

$$\iff x_3 = x_2$$

Ist in diesem Bsp nur legitim, da $x_i > 0$ und damit der Nenner $x_1^2 x_2 > 0$ ist.

i. A. muss für dieses Vorgehen Nenner > 0 überprüft werden

mit $\lambda = -x_1^2 x_2$ & $x_3 = x_2$ lautet II

$$2 x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 = 0$$

$$\overset{x_1, x_2 > 0}{\iff} 2 \cancel{x_1} x_2^{\cancel{2}} = x_1^{\cancel{2}} \cancel{x_2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{x_2}, \cdot \frac{1}{x_1}$$

$$\iff 2 x_2 = x_1$$

$$\iff x_2 = \tfrac{1}{2} x_1$$

$x_2 = x_3 = \frac{1}{2} x_1$ in I $\left(x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0\right)$

liefert $x_1 + \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_1 = 4$

$$\iff 2 x_1 = 4$$

$$\iff x_1 = 2$$

$x_2 = x_3 = 1/2\, x_1$

$\Longrightarrow \quad x_2 = 1 = x_3$

und $\quad \lambda = -x_1^2 x_2 = -(2)^2 = -4$

$\Longrightarrow \quad (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*) = (2, 1, 1, -4)$

ist lok Extrem.

Ob in $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$ lok Max oder

Min unter $g(x) = 0$ vorliegt entscheidet

$$C(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & \nabla_x^2 \mathcal{L}(\lambda^*, x^*) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_3} g(x) \right)$$

$$= (1, 1, 1)$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 x_3 + \lambda \\ x_1^2 x_3 + \lambda \\ x_1^2 x_2 + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 2x_2x_3 & 2x_1x_3 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_3 & 0 & x_1^2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L(\lambda^*, x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$C(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gilt nun

Hinr. Bed :

Erfüllt (x^*, λ^*) notw. Bed und gilt

- $(-1)^l \det(H_{2l+i}) > 0 \quad i = 1, .., n-l$,

dann ist x^* lok Min

- $(-1)^{l+i} \det(H_{2l+i}) > 0 \quad i = 1, .., n-l$, dann ist x^* lok Max

Für H_k Hauptunterabschnittsmatrix von $C(x^*)$

n die Anz an Var & l die Anz an

Nebenbed

Hier : $n=3$, $l=1$

Ber also $\det(H_{2\cdot 1+i})$ für $i=1,2$

also $\det(H_3)$ & $\det(H_4)$

Es ergibt sich

$$\det(H_3) = 6 \qquad i=1$$

&

$$\det(H_4) = -32 \qquad i=2$$

$\Rightarrow$

$$(-1)^{l+i} \det(H_{2l+i}) \overset{l=1}{=} \begin{cases} (-1)^{1+1} \det(H_3), & i=1 \\ (-1)^{1+2} \det(H_4), & i=2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \det(H_3) > 0, & i=1 \\ -\det(H_4) > 0, & i=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$ ist lok Max

unter $g(x) = 0$