Klausuraufgaben meist:

Gegeben Matrix A meist quadratisch $\in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (abh. v. Parameter)
und/oder zugeh. Lin. Gl.system (LGS)

__Fragen__: i) Wann ist LGS
lösbar, eindeutig lösbar, nicht lösbar

ii) Berechne Rang, Kern, Bild, Eigenwerte

iii) Gegeben $\det(A) = c$ $\rightarrow$ weitere Eigenschaften v. A?

__Beispiel__: Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 3p \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{für } p \in \mathbb{R} \quad (p \text{ darf } = 0 \text{ sein!})$$

LGS: $Ax = y$ $\quad y \in \mathbb{R}^3 \quad y = (y_1, y_2, y_3)^T$

Allg zur Lösbarkeit i)

Ist A quadratisch $\rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit anhand Determinante
$(A \in \mathbb{R}^{n\times n})$

- $\det(A) \neq 0 \rightarrow A$ invertierbar
  $\rightarrow$ eindeutige Lsg v. $Ax = b$ ex.

- $\det(A) = 0 \rightarrow A$ nicht invertierbar
  $\rightarrow$ LGS besitzt unendlich viele Lsg oder keine

In diesem Fall also weitere Analysen notwendig

A nicht quadratisch $\rightarrow$ • Determinante von A nicht definiert

$(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$

• LGS genau dann lösbar (nicht unbedingt eindeutig) wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$

• LGS eindeutig lösbar wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$ UND $\operatorname{rang}(A) = n$

Bem: Methoden für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ können auch für quadr. benutzt werden

Zurück zu Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 3p \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$

Determinante: mit Regel von Sarrus (Nur für 3x3 Matrizen)
oder Laplace-Entwicklung
(Sarrus einfacher)

Sarrus allgemein:

gegeben $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Erweitern B mit ersten zwei Spalten :

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(B) = + b_{11} b_{22} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} + b_{13} b_{21} b_{32}$$
$$- b_{31} b_{22} b_{13} - b_{32} b_{23} b_{11} - b_{33} b_{21} b_{12}$$

<u>Bsp</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 3p \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 3p & 3 & -4 \\ 2 & -6 & 6 & 2 & -6 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det(A) = + 2 \cdot (-4) \cdot 6 + 4 \cdot 3p \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot (-6)$$
$$- 2 \cdot (-4) \cdot 6 - (-6) \cdot 3p \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= \cancel{-48} \quad + 24p \quad - 108$$
$$\cancel{+48} \quad + 36p \quad - 72$$

$$= 60p - 180$$

Also

$$\det(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 60p - 180 = 0 \qquad | + 180$$

$$\Leftrightarrow \quad 60p = 180 \qquad | \cdot \tfrac{1}{60}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 3$$

$\Rightarrow$ $\det(A) = 0$ für $p = 3$, für alle $p \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ist $\det(A) \neq 0$ also invertierbar

D.h für $p \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ist das LGS

$$Ax = y$$

für beliebiges $y \in \mathbb{R}^3$ $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ eindeutig lösbar

Was wenn $p = 3$?

Lösbarkeit hängt von y ab (also ob unendl. viele oder keine Lsg ex)

Einsehbar mit Gauß-Elimination:

- Entsteht bei Gauß-Umformung Nullzeile in erweiterten Matrix $(A|y)$

gilt also $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|y)$

$\longrightarrow$ unendlich viele Lsg ex.

- Entsteht bei Gauß-Umformung Nullzeile in A, in $(A|y)$ aber nicht

gilt also $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|y)$

$\rightarrow$ LGS nicht lösbar (keine Lsg ex.)

<u>Bsp</u> Betr. $Ax = y$

für $p = 3$ & $y = (t, 0, 0)$ für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 9 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Erw. Matrix $A|y$

$$\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{array}$$

Bringe A|y mit Gauß auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 0 & -10 & 0 & -\tfrac{3}{2}t \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}t \end{array}\right)$$

rang (A|y):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}t \end{array}\right)$$

1. 2. 3.

Also rang (A) = 2 und

rang (A|y) = 2 wenn $t = 0$

bzw. rang (A|y) = 3 wenn $t \neq 0$

D.h. das LGS ist für

- $p \neq 3$ und $t \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar
- $p = 3$ und $t \neq 0$ nicht lösbar
- $p = 3$ und $t = 0$ lösbar

In der Klausur :

Für welche $p, t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 3p \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{I})$$

i) eindeutig lösbar ?

ii) lösbar ?

iii) nicht lösbar ?

Antwort 1) (über Determinante)

Zu i) : Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -4 & 3p \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

dann ist mit Sarrus

$$\det(A) = +\, 2 \cdot (-4) \cdot 6 \;+\; 4 \cdot 3p \cdot 2 \;+\; 6 \cdot 3 \cdot (-6)$$

$$-\, 2 \cdot (-4) \cdot 6 \;-\; (-6) \cdot 3p \cdot 2 \;-\; 6 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= \cancel{-48} \quad + 24p \quad - 108$$

$$\cancel{+48} \quad + 36p \quad - 72$$

$$= 60p - 180$$

Also $\det(A) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 60p = 180$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 3$$

$\Rightarrow$ Für $p \neq 3$ ist LGS eind. lösbar

Zu ii) & iii): Sei $p = 3$ dann gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 3 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 0 & -10 & 0 & -\tfrac{3}{2}t \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}t \end{array}\right)$$

Also $\operatorname{rang}(A) = 2$ und (I) besitzt

- unendlich viele Lsg wenn $t=0$

  denn dann ist

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|y) = 2$$

- keine Lösung, wenn $t \neq 0$, denn dann

$$\text{rang}(A) < \text{rang}(A|y) = 3$$

Antwort 2 (ohne Determinante)

Gauß-Elemination für 2 Parameter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 3p & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ +① \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 3 & -4 & 3p & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -t \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\tfrac{3}{2}) \\ +① \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & -9+3p & -3/2\, t \\ 0 & -10 & 0 & -t \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +① \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & t \\ 0 & -10 & -9+3p & -3/2\, t \\ 0 & 0 & 9-3p & 1/2\, t \end{array}\right)$$

Das LGS (I) besitzt also

- eine eindeutige Lösung wenn $9-3p \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 3$
  denn dann ist $\text{rang}(A) = 3$ = Anzahl an Unbekannten
- unendlich viele Lösungen
  wenn $p=3$ und $\frac{1}{2}t = 0 \Leftrightarrow t=0$
  denn dann ist
  $$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|y) = 2$$
- keine Lösung wenn $p=3$ & $t \neq 0$
  denn dann ist
  $$\text{rang}(A) < \text{rang}(A|y) = 3$$

Bemerkung
Je nachdem was in der Aufgabe noch gefragt ist, bietet sich Antwort 1 oder 2 an

Rang, Kern, Bild, Eigenwerte   Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrix

- Berechnung rang(A):
  Bringe A auf Zeilenstufenform (s.o)
  Anzahl der Stufen entspricht dem Rang der Matrix

- Berechnung ker(A) (Kern)

Für kern(A): Löse $Ax=0$ und gebe Lösungsmenge an, denn

$$\ker(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

bringe also $(A|0)$ auf Zeilenstufenform s.o & löse rückwärts auf

- Berechnung Bi(A):
  Bringe Matrix auf Zeilenstufenform.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{\dots}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Einträge, welche die Anzahl der Stufen angeben (hier rot) geben an, welche Spaltenvektoren von A linear unabh. sind (hier $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$)

$$\Longrightarrow \text{Bi}(A) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bem: Es gilt für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch)

$$\begin{aligned}
& \operatorname{rang}(A) = n \\
\iff & \ker(A) = \{0\} \\
\iff & \operatorname{Bi}(A) = \mathbb{R}^n \\
\iff & \det(A) \neq 0 \\
\iff & A \text{ invertierbar} \\
\iff & \text{die Spaltenvektoren in } A \\
& \text{sind linear unabhängig} \\
\iff & \text{die Zeilenvektoren in } A \\
& \text{sind linear unabhängig} \\
\iff & \text{alle Eigenwerte von } A \\
& \text{sind } \neq 0
\end{aligned}$$

Für Determinanten gilt immer:

Seien $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(C) = \det(C^T)$$

$$\det(CA) = \det(C)\det(A)$$

Ist $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl so gilt für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
\det(aA) &= \det(aI \cdot A) \\
&= \det(aI) \cdot \det(A) \\
&= a^n \det(A
\end{aligned}$$

also auch $\det(CC^T) = \det(C)\det(C^T) = \det(C)^2$

Ist A

- invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- orthogonal $(A^{-1} = A^T)$, so gilt $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$

Berechnung Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte einer Matrix A sind Lösungen der Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

I ist Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel Bestimme alle reellen EW der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Da $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

λ gesucht s.d. $\det(A - \lambda I) = 0$

Es ist $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ c & -\lambda \end{pmatrix}$

also $\det(A - \lambda I) = -(1-\lambda)\lambda - c$

Also $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow -(1-\lambda)\lambda - c = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - c = 0$

Mitternachtsformel liefert

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-c)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

Das sind die Eigenwerte von A. Diese sind reell

wenn $1+4c \geq 0$

$\iff c \geq -1/4$

gilt.

<u>Berechnung Eigenvektoren</u>

Eigenvektoren sind immer einem Eigenwert zugeordnet:

Der zu λ_j zugehörige Eigenvektor v_j ist eine nicht triviale $(v_j \neq 0)$ Lösung der Gleichung

$$A v_j = \lambda_j v_j$$

$$\iff (A - \lambda_j I) v_j = 0$$

D.h. zu λ_j zugeh. Eigenvektoren sind nicht triviale Elemente von

$$\ker(A - \lambda_j I)$$

Um zu λ_1 zugeh. Eigenvektor zu erhalten, löse daher

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\det(A - \lambda I) = 0$ für $\lambda = \lambda_1$, kann $A - \lambda_1 I$ auf Zeilenstufenform mit (mind.) einer Nullzeile gebracht werden $\longrightarrow$ mind. ein Freiheitsgrad bei Lösung von $(A - \lambda_1 I)x = 0$

Wähle ohne Einschr. $x_2 = 1$ (dann ist Eigenvektor schonmal nicht trivial)

<u>Am obigem Bsp</u>

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4c}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ c & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} & 1 \\ c & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} & 1 \\ c & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{x_2 = 1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{1+4c} & 1 \\ c & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zweite Zeile des LGS lautet

$$c x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}}{c} \qquad \text{für } c \neq 0$$

D.h. $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$

ist zu λ_1 zugehöriger Eigenvektor

Für λ_2 ergibt sich analog: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}\right)}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$

Komplexe Zahlen

Aufgaben meist:

Gegeben $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Berechne

i) Betrag v. z : $|z|$

ii) z in Polarkoord

iii) z^n für ein $n \in \mathbb{N}$

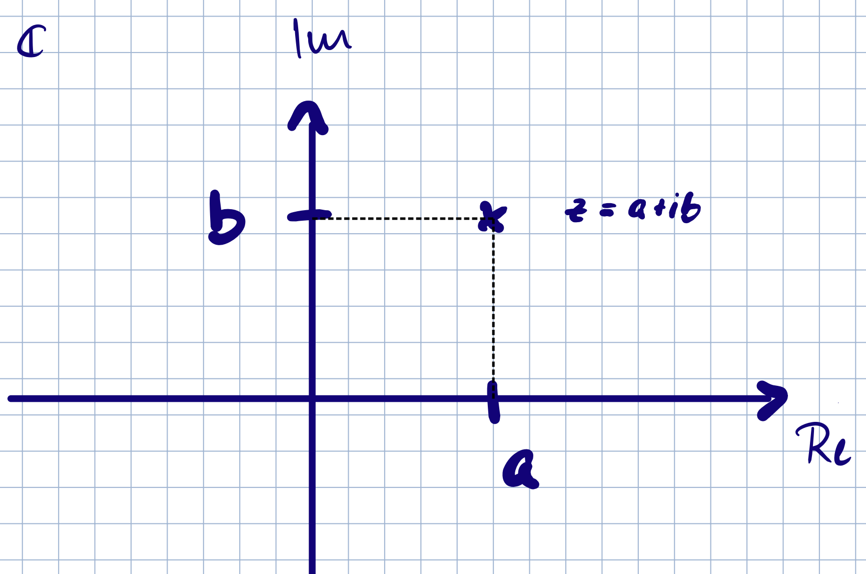
iv) $\frac{1}{z}$ bzw z^{-1}

i) Betrag : $|z|$ ist definiert als $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Für $\tilde{z} = 1 - i = 1 + i(-1)$ also $|\tilde{z}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

ii) **Polarkoord** : Betrachte kompl. Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$

Sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$



z kann als Vektor im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden mit Koord.

$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

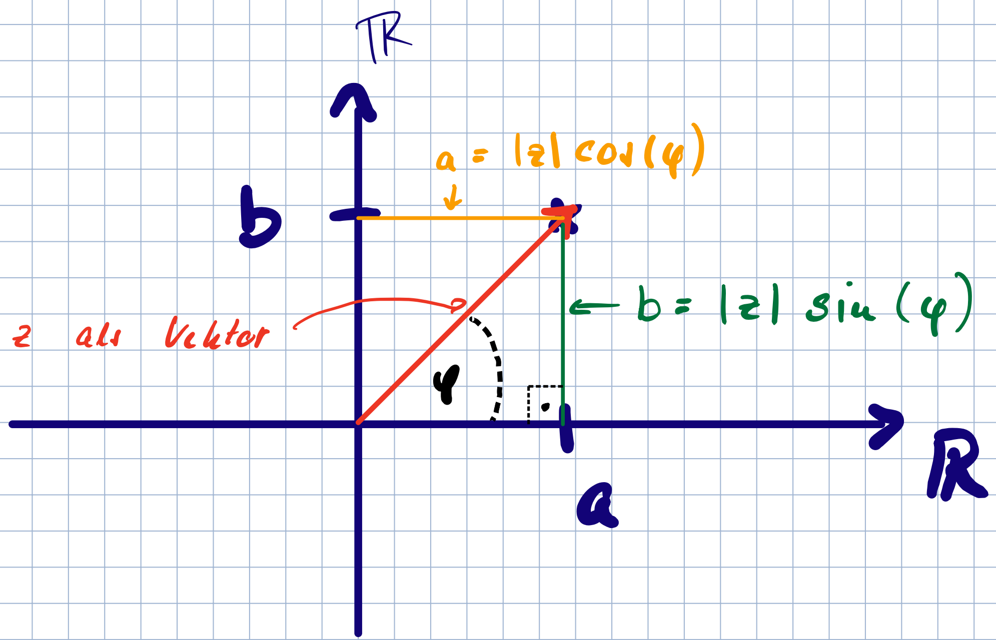
Polarkoordinaten eines Vektors z bestehen aus

- Länge des Vektors z : $|z|$
- Winkel φ zur "Polachse"

  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (gegen den Uhrzeigersinn)

Trigonometrie liefert

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Polarkoord v. $z = a + ib$ über die Eulersche-Formel

$$\text{"} \; e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \; \text{"}$$

Also

$$z = a + ib = |z| \cos(\varphi) + i \, |z| \sin(\varphi)$$

$$= |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right)$$

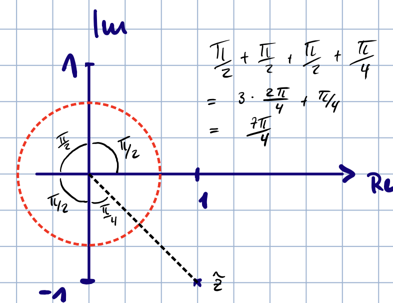
$$= |z| \, e^{i\varphi}$$

Der Winkel φ erfüllt dabei

$$\varphi = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right), & b \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right), & b < 0 \end{cases}$$

Für $\tilde{z} = 1 - i = \underbrace{1}_{=a} + i\underbrace{(-1)}_{=b<0}$ also

$$\varphi = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4}\pi$$



Damit lautet $\tilde{z}$ in Polarkoord.

$$\tilde{z} = |\tilde{z}| e^{i\varphi} = \sqrt{2}\, e^{i\,7/4\,\pi} = \sqrt{2}\, e^{i(4/4\,\pi + 3/4\,\pi)}$$

$$= \sqrt{2}\, \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} e^{i\,3/4\,\pi}$$

$$= -\sqrt{2}\, e^{i\,3/4\,\pi}$$

iii) <u>Potenzen von kompl. Zahlen</u>

1) über Polarkoord.: für $\tilde{z} = 1 - i \Rightarrow \tilde{z} = -\sqrt{2}\, e^{i\,3/4\,\pi}$

$$\Rightarrow \tilde{z}^n = (-\sqrt{2})^n \left(e^{i\,3/4\,\pi}\right)^n$$

$$= (-\sqrt{2})^n e^{in\,3/4\,\pi}$$

2) Ist $n \in \mathbb{N}$ eine fest vorgegebene Zahl kann auch ohne Polarkoord. potenziert werden:

z.B: $\tilde{z}^4 = (1-i)^4 = (1-i)^2(1-i)^2$

Mit $(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = 1 - i - i - 1$
$= -2i$

also $\tilde{z}^4 = (-2i)(-2i) = 4i^2 = -4$

iv) <u>Berechnung von z^{-1} bzw $\frac{1}{z}$</u>

Zu gegebenem $z \in \mathbb{C}$ soll z^{-1} ber. werden:

z^{-1} soll $z \cdot z^{-1} = 1$ erfüllen

$\Rightarrow$ ist $z = a+ib$ gegeben, berechne $z^{-1} = c+id$
sodass $(a+ib)(c+id) = 1$ gilt.

Nun ist

$$(a+ib)(c+id) = ac + aid + ibc - bd$$
$$= ac - bd + i(ad + bc)$$

Aus $(a+ib)(c+id) \overset{!}{=} 1$
folgt durch Koeffizientenvergleich

$\boxed{\text{Bem } (1 = 1 + 0i)}$

$$ac - bd = 1$$
$$ad + bc = 0$$

Löse dies nach c & d auf.

Beispiel: $\tilde{z} = 1 - i$, also $a = 1$, $b = -1$

gesucht $\tilde{z}^{-1}$

Das LGS $\begin{aligned} ac - bd &= 1 \\ ad + bc &= 0 \end{aligned}$ lautet in diesem Fall

also $$\begin{aligned} 1 \cdot c + 1 \cdot d &= 1 \qquad (I) \\ 1 \cdot d - 1 \cdot c &= 0 \qquad (II) \end{aligned}$$

Aus Zeile (I) folgt $c = 1 - d$, dies in II

liefert $$d - (1 - d) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2d - 1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad d = 1/2$$

Also $c = 1 - d = 1 - 1/2 = 1/2$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{z}^{-1} = 1/2 + 1/2\, i$$