Konkavität / Konvexität

Aufgabe meist: Gegeben sei Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
mit $D \subset \mathbb{R}^2$

i) Untersuche f auf Konkavität / Konvexität
ii) Sei $y \in D$ s.d. $\nabla f(y) = 0$
Ist y Max / Min oder Sattelpkt ?

Zu i) Es gilt: Ist f zweimal differenzierbar & D konvex
so ist

f konvex in D $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ pos. semidef. für alle $x \in D$
f strikt konvex in D $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ pos. def. für alle $x \in D$
f konkav in D $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ neg. semidef. für alle $x \in D$
f strikt konkav in D $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ neg. def. für alle $x \in D$

Zur Analyse v. Konkavität / Konvexität
berechne also Hessematrix $\nabla^2 f(x)$ und untersuche
Definitheit v. $\nabla^2 f(x)$

Definitheit:

Bei quadr. Formen $f(x) = x^T A x$, A symm.
ergibt sich

$$f(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 \qquad (*)$$

$$\overset{a_{12}=a_{21}}{=} a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

Also
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2a_{11} x_1 + 2 a_{12} x_2 \\ 2 a_{22} x_2 + 2 a_{12} x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} = 2A$$

$\Rightarrow$ Definitheit v. $\nabla^2 f(x)$ entspricht der Def v. A.

Eine Matrix A heißt,

i) pos. def, falls $x^T A x > 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$

ii) pos. semi def., falls $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$

iii) neg. def, falls $x^T A x < 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$

iv) neg. semi def., falls $x^T A x \leq 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$

Ist A symm. so gilt zusätzlich

A pos def $\iff \det(A_k) > 0 \quad k = 1, .., N$

A neg def $\iff (-1)^k \det(A_k) > 0 \quad k = 1, .., N$

Für A_k Hauptabschnittmatrix $A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ usw.

Bem: Nach dem Satz von Schwarz ist die Hessematrix $\nabla^2 f(x)$ einer 2 mal total differenzierbaren Fkt f an jeder Stelle $x \in \mathbb{D}_f$ symmetrisch

Für die Analyse der Definitheit der Matrix $A := \nabla^2 f(x)$ für $f \in C^2$ ergibt sich also:

$$A \text{ ist pos def}$$
$$\Longleftrightarrow \det(A_k) > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, N$$
$$\Longleftrightarrow f \text{ strikt konvex}$$

$$A \text{ ist neg def}$$
$$\Longleftrightarrow (-1)^k \det(A_k) > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, N$$
$$\Longleftrightarrow f \text{ strikt konkav}$$

Ein Hauptunterdeterminantenkriterium für positive / negative Semidefinitheit gibt es hingegen nicht

Beispiel: Untersuche

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1 x_2 + 8x_2^2$$

auf Konkavität / Konvexität.

Vgl $f(x_1, x_2)$ mit (*):

(*) war $a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2$.

und

$$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 - 4x_1 x_2 + 8x_2^2 = 4x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 + 8x_2^2$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2) = x^T \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} x = x^T A x$$

Also ist f quadr. Form mit

$$f(x_1, x_2) = x^T A x \quad \text{für}$$

symm. Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

Definitheit v. A: Hauptunter-Det. krit.:

$$\det(A_1) = 4 \qquad \det(A_2) = 4 \cdot 8 - (-2)(-2) > 0$$

$$\Rightarrow A \text{ pos def} \Rightarrow f \text{ strikt konvex}$$

zu ii) Es gilt:

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar & konvex (konkav) und $y \in D$ erfüllt $\nabla f(y) = 0$, dann ist y bereits globales Minimum (Maximum)

Ist $\nabla^2 f(x)$ hingegen indefinit, f also weder konvex noch konkav & $\nabla f(y) = 0$, dann liegt in y ein Sattelpunkt vor

Zurück zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$$

ist strikt konvex

Globales Minimum also in $y \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\nabla f(y) = 0$$

Es ist $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 4x_2 \\ 16x_2 - 4x_1 \end{pmatrix}$

Löse $\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + 16x_2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ Glob Minimum in $y = (0,0)$.

<u>Weitere Möglichkeit zur Definitheitsanalyse:</u>

Bestimme alle Eigenwerte von $\nabla^2 f(x)$

- sind alle Eigenwerte $> 0 \iff \nabla^2 f(x)$ pos. def.
- sind alle Eigenwerte $\geq 0 \iff \nabla^2 f(x)$ pos. semi def.
- sind alle Eigenwerte $< 0 \iff \nabla^2 f(x)$ neg. def.
- sind alle Eigenwerte $\leq 0 \iff \nabla^2 f(x)$ neg. semi def.

<u>Definitheit quadr. Formen unter Nebenbed</u>

Sei $f(x) = x^T A x$, A symm $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

<u>Frage</u>: ist f pos/neg definit unter der Nebenbed $Bx = 0$ für $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$?

<u>Bem</u>: Für $g(x) := Bx = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n \end{pmatrix}$

ist $Dg(x) = B$

Antwort

f pos def unter $Bx = 0$

$$\iff \quad (-1)^{\ell} \det(H_{2\ell+i}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-\ell$$

f neg def unter $Bx = 0$

$$\iff \quad (-1)^{\ell+i} \det(H_{2\ell+i}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-\ell$$

Für H_i (i,i) Hauptabschnittmatrix (Hauptuntermatrix) von $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$

Bsp: Sei $f(x) = 4x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$.
Ist f unter $x_1 + x_2 = 0$ pos definit?

Vgl $f(x_1, x_2)$ mit ⊛:

⊛ war $x^T A x = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2$.

d.h. für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (symm) ist

$f(x) = x^T A x$ also quadr. Form

Für $B = (1, 1)$ gilt $Bx = (1, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$

Verwende obiges Resultat und überprüfe

$$(-1)^{\ell} \det(H_{2\ell+i}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-\ell$$

für h_i Hauptabschn. matrix von

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei $l = 1$, $n = 2$, also $n - l = 1$

d.h. überprüfe

$$(-1) \det(h_{2+1}) > 0$$

<u>Sarrus</u>:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\det(h_{2+1}) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1$$

$$\Rightarrow -1 \det(h_{2+1}) > 0$$

$\Rightarrow$ f pos def unter $B_x = 0$

Funktionalmatrix & implizite Auflösbarkeit

Ist $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ so ist die Funktionalmatrix geg. als

$$Df(x_1,\dots,x_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_1,\dots,x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_m) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_1,\dots,x_m) \end{pmatrix}$$

Implizite Auflösbarkeit

Gegeben $f: \mathbb{R}^{N+l} \to \mathbb{R}^{l}$

Frage: ist $f(x)=0$ lokal an einer Stelle $x^* \in \mathbb{R}^{N+l}$ (nach $(x_{N+1}, \dots, x_{N+l})$) auflösbar?

Grundlage: Satz ü. impl. Fkt.

Eine solche Auflösung (bzw. auflösende Funktion $\varphi : \overbrace{U_\varepsilon((x_1^*, \dots, x_N^*))}^{\varepsilon\text{-Umgebung von } x^*} \to \mathbb{R}^{l}$) existiert wenn

1) $f(x^*) = 0$

2) Die Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_{N+1}} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_{N+l}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l(x^*)}{\partial x_{N+1}} & \dots & \frac{\partial f_l(x^*)}{\partial x_{N+l}} \end{pmatrix}$$
invertierbar ist

Die auflösende Fkt. φ erfüllt $\varphi(x_1^*, \dots, x_N^*) = (x_{N+1}^*, \dots, x_{N+l}^*)$

sowie $f(x_1, \dots, x_N, \varphi(x_1, \dots, x_N)) = 0$ und

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial(x_{N+1}, \dots, x_{N+\ell})}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial(x_1, \dots, x_N)}$$

für alle $x \in \mathcal{U}_\varepsilon((x_1^*, \dots, x_N^*))$

Bsp: Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - e^{x_2} - x_3^2 + 1 \\ \cos(\pi x_1) - x_2^3 + x_3^3 \end{pmatrix}$$

Frage: Ist $f(x) = 0$ lokal an $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (-1, 0, 1)$ nach (x_2, x_3) auflösbar? Welchen Wert besitzt die auflösende Fkt φ an der Stelle -1?

Antwort:

1) Überprüfe $f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$:

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - e^{\overset{=1}{0}} - 1^2 + 1 \\ \cos(-\pi) - 0^3 + 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

2) Überprüfe Invertierbarkeit:

Auflösung nach (x_2, x_3)

$\Longrightarrow$ Berechne: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x^*) \end{pmatrix}$

Es ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -e^{x_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -2x_3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -3x_2^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 3x_3^2$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^0 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x^*) \end{pmatrix}\right) = -3 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Invbar

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ lokal an $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (-1, 0, 1)$

nach (x_2, x_3) auflösbar. Mit aufl. Fkt

$$\varphi : U_\varepsilon(x_1^*) \to \mathbb{R}^2 \quad \text{und wegen}$$

$$-1 = x_1^* \quad \text{gilt} \quad \varphi(-1) = (0, 1)^T$$

nach dem Satz über impl. Fkt

Optimierung mit Gleichheits & Ungleichheitsnebenbedingungen

Aufgabe meist: Gegeben

min./max. $f(x)$

udN. $g_j(x) = 0$ $\quad$ (& $h_i(x) \geq 0$)

für $j = 1, \dots, l$, $\quad$ $(i = 1, \dots, m)$

bestimmen die mögliche (bei Ungl.bed) relative Extrema

mit
- Ansatz v. Lagrange (wenn keine Ungleichheitsbed)
- KKT-Ansatz (wenn Ungleichheitsbed)

Gleichheitsbed

Ansatz v. Lagrange

min./max. $\quad f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

udN. $\quad g_j(x) = 0 \quad$ für $\quad j = 1, \dots, l$

Vorgehen 1) Stelle Lagrangefkt auf

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(x)$$

2) **Löse notw Bed**: $\quad \nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$

sei
$$\nabla \hat{\mathcal{L}}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_1} g_j(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_n} g_j(x) \end{pmatrix}$$

Gradient von $\mathcal{L}$ wenn λ als Konstante angesehen wird. Wird auch oft als $\nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x)$ notiert

dann ist

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_l(x) \end{matrix}\right\} = \nabla_\lambda \mathcal{L}(\lambda, x) \\ \nabla \hat{\mathcal{L}}(\lambda, x) \Big\} = \nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x) \end{pmatrix}$$

3) Überprüfe hinr. Bed (wenn nach Art der lok. Extr. gefragt wird)

(oft nicht der Fall da Zeitintensiv)

<u>Hinr. Bed</u>:

Erfüllt (x^*, λ^*) notw. Bed und gilt

- $(-1)^l \det(h_{2l+i}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-l$,

  dann ist x^* lok Min

- $(-1)^{l+i} \det(h_{2l+i}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-l$,

  dann ist x^* lok Max

h_k sei Hauptabschnittsmatrix von

$$C(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & \nabla^2 \mathcal{L}(\lambda^*, x^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & \underbrace{\nabla_x(\nabla_x \mathcal{L}(\lambda^*, x^*))}_{} \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix von $\mathcal{L}$ wenn λ als Konstante angesehen wird

$$= \begin{pmatrix} 0_{\ell \times n} & \begin{matrix} \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial g_\ell(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_\ell(x^*)}{\partial x_n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_\ell(x^*)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_\ell(x^*)}{\partial x_n} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda^*,x^*)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda^*,x^*)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\lambda^*,x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} & & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\lambda^*,x^*)}{\partial x_n^2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Beispiel max $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$ $\quad x_i > 0 \quad i = 1,2,3$

udN $g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

Berechne alle mögl. rel. Extr.

1) $n = 2$, $\ell = 1$

Lagrange Fkt $\mathcal{L}(\lambda, x) = f(x) + \lambda g(x)$

$$= x_1 x_2^2 x_3^3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 2)$$

<u>notw Bed</u> $\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \nabla_\lambda \mathcal{L}(\lambda, x) \\ \nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) \\ \nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x) \end{pmatrix}$$

mit

$$\nabla_x \mathcal{L}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 f(x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \\ \partial/\partial x_2 f(x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \\ \partial/\partial x_3 f(x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^2 x_3^3 + \lambda \\ x_1 2 x_2 x_3^3 + \lambda \\ x_1 x_2^2 3 x_3^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

also

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 & \mathrm{I} \\ x_2^2 x_3^3 + \lambda = 0 & \mathrm{II} \\ x_1 2 x_2 x_3^3 + \lambda = 0 & \mathrm{III} \\ x_1 x_2^2 3 x_3^2 + \lambda = 0 & \mathrm{IV} \end{array} \right.$$

Aus II folgt $\lambda = -x_2^2 x_3^3$, dies in III liefert

$$2x_1 x_2 x_3^3 - x_2^2 x_3^3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 x_1 \cancel{x_2} \cancel{x_3^3} = x_2^{\cancel{2}} \cancel{x_3^3}$$

$x_1, x_2, x_3 > 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 x_1 = x_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1 = \tfrac{1}{2} x_2$$

$\lambda = -x_2^2 x_3^3$ & $x_1 = \tfrac{1}{2} x_2$ in $\overline{\underline{IV}}$ liefert

$$x_1 x_2^2 \, 3 x_3^2 + \lambda = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} x_2^3 \, 3 x_3^2 - x_2^2 x_3^3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{3}{2} x_2^{\cancel{3}\,1} \cancel{x_3^2} = \cancel{x_2^2} x_3^{\cancel{3}\,1}$$

$$\overset{x_2, x_3 > 0}{\Longleftrightarrow} \quad \tfrac{3}{2} x_2 = x_3$$

Aus I ergibt sich durch Einsetzen

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} x_2 + x_2 + \tfrac{3}{2} x_2 - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3 x_2 = 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_2 = \tfrac{2}{3}$$

Also $x_2^* = \tfrac{2}{3}$, $x_3^* = \tfrac{3}{2} x_2^* = 1$,

$x_1^* = \tfrac{1}{2} x_2^* = \frac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$,

und $\lambda^* = - x_2^{*2} x_3^{*3} = - x_2^{*2} = - \tfrac{4}{9}$

Ist $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1/3, 2/3, 1)$

lokal. Max oder Min ?

$\rightarrow$ Benötige

$$C(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & \nabla_x^2 L(\lambda^*, x^*) \end{pmatrix}$$

$$Dg(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g(x) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} g(x) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L(\lambda, x) = \nabla_x \left(\nabla_x L(\lambda, x) \right)$$

$$= \nabla_x \begin{pmatrix} x_2^2 x_3^3 + \lambda \\ x_1 2 x_2 x_3^3 + \lambda \\ x_1 x_2^2 3 x_3^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 x_2 x_3^3 & 3 x_2^2 x_3^2 \\ 2 x_2 x_3^3 & x_1 x_3^3 & 6 x_1 x_2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x_2^2x_3^2 & 6x_1x_2x_3^2 & 6x_1x_2^2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L(\lambda^*, x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & 8/9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 1 & 4/3 & 1/3 & 4/3 \\ 1 & 4/3 & 4/3 & 8/9 \end{pmatrix}$$

Es ist $l = 1$ & $n = 3 \Rightarrow n - l = 2$

<u>Hinr. Bed für lok Max</u>

$$(-1)^{l+i} \det(h_{2l+i}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-l = 2$$

überprüfen:

$$(-1)^2 \det(h_{2+1}) > 0$$

$$(-1)^3 \det(h_{2+2}) > 0$$

Es ergibt sich

$$\det(H_{2+1}) = 7/3$$

$$\det(H_{2+2}) = \frac{-64}{27}$$

also ist hinr. Bed für lok. Max erfüllt

Alternativ (wenn λ^* bekannt)

Ist $\mathcal{L}(\lambda^*, x)$ konkav (konvex), (d.h. prüfe Definitheit von $\nabla^2 \hat{\mathcal{L}}(\lambda^*, x)$) so ist x^* lokales Max (Min)

unter $g_1(x), \dots, g_l(x) = 0$

KKT - Ansatz

Aufgabe meist: Betrachtet wird das Opt. P

$$\max. \quad f(x)$$
$$\text{udN.} \quad h_i(x) \geq 0 \quad , \text{ für } \quad i = 1, \dots, m$$

(meist ohne Gleichheits NB
$$g_j(x) = 0 \quad , \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, l \quad)$$

i) Bestimme mögl. relative Extrema mit KKT - Ansatz

ii) Welche Ungl. Bed sind in den mögl. Lsg aktiv?

i) Vorgehen Stelle KKT-Gl. auf:

KKT Gl lauten

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla g_j(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x) = 0$$

Entfallen wenn keine "=" - NB

$$g_j(x) = 0 \qquad j = 1, .., l$$

$$\mu_i h_i(x) = 0 \qquad i = 1, .., m$$

$$\mu_i \geq 0 \qquad i = 1, .., m$$

$$h_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, .., m$$

(x^*, λ^*, μ^*) erfüllt Notw. Bed. erster Ordnung

$\Longleftrightarrow$ (x^*, λ^*, μ^*) erfüllt KKT-Gl

ii) Ungl. $h_i(x) \geq 0$ heißt aktiv in x^* wenn $h_i(x^*) = 0$ gilt, inaktiv wenn $h_i(x^*) > 0$

Bsp: $\max \quad f(x_1, x_2) = 3 \ln(1 + x_2) - 2x_1$

u.d.N. $x_1 - x_2^2 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

i) KKT Gl: (Hier $m = 2$ keine "=" - Bed)

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x) = 0$$

$$\mu_i \cdot h_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\mu_i \geq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$h_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, 2$$

mit $h_1(x) := x_1 - x_2^2$

$h_2(x) := x_2$

Es ist:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{1+x_2} \end{pmatrix}, \quad \nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x_2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla h_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ KKT-Gl

(I) $\quad -2 + \mu_1 = 0$

(II) $\quad 3/(1+x_2) + \mu_1(-2x_2) + \mu_2 = 0$

(III) $\quad \mu_1 (x_1 - x_2^2) = 0$

(IV) $\quad \mu_2 \, x_2 = 0$

$$\mu_i \geq 0 \qquad i = 1, 2$$

$$h_i(x) \geq 0 \qquad i = 1, 2$$

Aus (I) folgt $\mu_1 = 2$

$\Rightarrow$ (III) $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2^2$

Jetzt Fallunterscheidung: Wegen $\mu_i \geq 0$ muss

$\mu_2 > 0$ oder $\mu_2 = 0$ gelten:

<u>Angenommen $\mu_2 > 0$</u>

dann liefert (IV) $x_2 = 0$

also auch $x_1 = 0$

(II) mit $x_2 = 0$ lautet aber

$$3 + \mu_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_2 = -3 \quad \lightning \text{ zu } \mu_2 > 0$$

Also kann nur

$\mu_2 = 0$ gelten, dann lautet (II):

$$3/(1+x_2) - 4x_2 = 0 \qquad | +4x_2 ; \cdot (1+x_2)$$

$1+x_2 > 0$ wegen $x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = 4x_2(1+x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x_2^2 + 4x_2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x_2 - 1)(2x_2 + 3) = 0$$

Lsg v. (II) sind also

$$x_2 = 1/2 \quad \& \quad x_2 = -3/2$$

wegen $x_i \geq 0$ muss $x_2 = 1/2$ sein

Damit ist $x_1 = x_2^2 = 1/4$

$\Rightarrow$ mögl. rel Extr in

$$(x_1^*, x_2^*, \mu_1^*, \mu_2^*) = (1/4, 1/2, 2, 0)$$

wegen $x_1^* = x_2^{*2} \Leftrightarrow h_1(x^*) = 0$

& $x_2^* > 0 \Leftrightarrow h_2(x^*) > 0$

ist h_1 aktiv in x^*

& h_2 inaktiv in x^*