Universität Konstanz
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2024

Mathewerkstatt zu Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die Funktionalmatrix der folgenden Funktionen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2,$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(xy) + 1 \\ \sin(x) + \cos(y) \end{pmatrix},$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ \ln(x) \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie zudem für die Funktion f die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x_1, x_2)$.

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x \exp(x(1 - y_2)) = y_1, \quad -\cos(\pi x y_1) = y_2$$

lokal an der Stelle $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = (1, 1, 1)^T$ nach $y = (y_1, y_2)^T$ auflösbar ist. Gehen Sie dabei folgendermaSSen vor:

- Definieren Sie mittels des Gleichungssystems eine geeignete Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, welche von den drei Variablen x, y_1 und y_2 abhängt.
- Verifizieren Sie anschließend mit der Funktion f

  (∗) $f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

  (∗∗) $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$ ist invertierbar, wobei $y = (y_1, y_2)$.
- Wenden Sie nun den Satz über implizite Funktionen an, um die Existenz einer auflösenden Funktion φ zu sichern.

Berechnen Sie zum Schluss noch $\varphi'(1) \in \mathbb{R}^{2,1}$ durch Differenzieren der Gleichung $f(x, \varphi(x)) = 0$ nach x.

Aufgabe 7.3

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + y + z, \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + z - 2x \\ 2z + 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$ durch Auflösen der Gleichung $g(x,y,z) = 0$ nach (y,z) und Einsetzen in f.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 0$ ebenfalls mit der Methode von Lagrange (nur die notwendige Bedingung erster Ordnung ist zu prüfen).