Universität Konstanz
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2025

Mathewerkstatt zu Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1

Überprüfen Sie mithilfe der Methode von Lagrange, ob die Funktion

$$f(x, y) = x + y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

lokale Extrema hat. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Stellen Sie die Lagrange-Funktion L auf.

(ii) Leiten Sie aus den notwendigen Bedingungen erster Ordnung die möglichen lokalen Extrema (x^*, y^*) mit dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator λ^* her.

(iii) Überprüfen Sie die quadratische Form $Q(w) = w^T \nabla^2 \hat{L}(x^*, y^*)w$ auf positive bzw. negative Definitheit bezüglich der Nebenbedingung

$$Dg(x^*, y^*)w = 0,$$

wobei $\hat{L}(x, y) = L(\lambda^*, x, y)$ (hinreichende Bedingung zweiter Ordnung).

Aufgabe 8.2

Gegeben sei die Lagrange-Funktion von Aufgabe 7.3:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

mit $f(x, y, z) = x^2 + y + z$, $g_1(x, y, z) = y + z - 2x$, $g_2(x, y, z) = 2z + 4$ und dem stationären Punkt $(x^*, y^*, z^*) = (-1, 0, -2)$ und zugehörigem Lagrange-Multiplikator $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (-1, 0)$.

Zeigen Sie, dass (x^*, y^*, z^*) ein lokales Minimum der Funktion f ist unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = 0$ und $g_2(x, y, z) = 0$, indem Sie die Funktion

$$\hat{L}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1^* g_1(x, y, z) + \lambda_2^* g_2(x, y, z)$$

auf Konvexität prüfen.

Aufgabe 8.3

Bestimmen Sie die möglichen lokalen Extrema von

$$f(x, y) = x - y + \alpha$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y = \beta$$

in Abhängigkeit der Parameter α und β. Berechnen Sie anschließend die Optimalwertfunktion $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ und deren partielle Ableitungen nach α und β.