Lösungen zu Blatt 3

Aufg. 1

Zu lösen: $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für die Cramersche Regel braucht man:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

entwickeln nach Zeile 1

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2-2) - 2 \cdot (-2+4) - (1-2)$$

$$= -3 \neq 0 \implies A \text{ invertierbar}$$

Damit gilt:

$$x_j = \frac{\det(A_{j,b})}{\det(A)}, \quad j = 1,2,3.$$

Mit

$$\det(A_{1,b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det(A_{2,b}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det(A_{3,b}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 6$$

folgt also

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1,$$

$$x_2 = \frac{6}{-3} = -2,$$

$$x_3 = \frac{6}{-3} = -2.$$

Aufg. 2

a) Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt

$$x^T A x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + 5x_2^2 > 0, \text{ da } (x_1, x_2) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ A positiv definit.

Für die Matrix B gilt

$$x^T B x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 \\ -x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$= -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2$$

$$= -(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \text{ da } (x_1, x_2) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ B neg. definit.

b) Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{3,3}$, A symmetrisch, mit

$Q(x) = x^T A x$.

Ansatz: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ symmetrisch!

Es gilt mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$x^T A x = (x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ bx_1 + dx_2 + ex_3 \\ cx_1 + ex_2 + fx_3 \end{pmatrix}$$

$$= ax_1^2 + dx_2^2 + fx_3^2 + 2bx_1x_2$$

$$+ 2cx_1x_3 + 2ex_2x_3$$

Koeffizientenvergleich liefert

$a = -2$, $d = -2$, $f = -10$, $b = -1$,

$c = 4$, $e = 1$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Wende nun Satz 2 aus §3, Kapitel 5 an:

Es gilt $\det(A_1) = \det(-2) = -2$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^1 \det(A_1) > 0$$

$$(-1)^2 \det(A_2) > 0 \qquad \Rightarrow \quad Q \text{ neg. definit.}$$

$$(-1)^3 \det(A_3) > 0$$

c) Wende Satz 3 aus §3, Kapitel 5 an:

Hier ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (2 \;\; 1 \;\; 0)$

und $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

mit $\ell = 1$ und $N = 3$.

Zu berechnen:

$\det(h_3) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ und $\det(h_4) = \det(C)$.

Es gilt

$$\det(h_3) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -5,$$

$$\det(h_4) = 3 \cdot \det(h_3) = -15$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^1 \det(h_3) > 0 \quad \text{und} \quad (-1)^1 \det(h_4) > 0$$

D.h. Q ist pos. definit unter der Nebenbedingung $Bx = 0$.

Aufg. 3

a) Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+7} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

Eigenvektor v^1: (zu $\lambda_1 = 7$)

$$(A - \lambda_1 I_2) v^1 = 0:$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-6} & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = 4/6 = 2/3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Wähle $v_2^1 = 1$ (auf 1 normiert)

und erhalte $v_1^1 = -\frac{1}{6} \cdot (-3 v_2^1) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Eigenvektor v^2:</u> (zu $\lambda_2 = -1$)

$(A - \lambda_2 I_2) v^2 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = -2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Normiere $v_2^2 = 1$ und erhalte $v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (-3 v_2^2) = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Char. Polynom: $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - c \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c}$$

Das bedeutet:

- $c > -\frac{1}{4} \Rightarrow$ zwei reelle EWe λ_1 und λ_2
- $c = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ ein reeller EW $\lambda = \frac{1}{2}$
- $c < -\frac{1}{4} \Rightarrow$ kein reeller EW