Lösungen Blatt 4

Aufg. 1

$$\begin{pmatrix} i-1 & 0 \\ 2 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{i-1} & 0 & i \\ 2 & 3i & 1 \end{array}\right) \quad \lambda = ?$$

Suche $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $(i-1)\lambda + 2 = 0$:

$$(i-1)\lambda + 2 = 0 \quad | \cdot (i+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$(i^2-1)\lambda + 2(i+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = i+1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} i-1 & 0 & i \\ 0 & 0+3i & i\cdot(i+1)+1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i-1 & 0 & i \\ 0 & 3i & i \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{i}{3i} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{i}{i-1} = \frac{i(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-1+i}{-1-1} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i$$

D.h. die Lsg. ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Aufg. 2

Char. Polynom: $p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$ (Eigenwerte)

(beachte hier: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$)

<u>Zu v^1:</u> (Eigenvektor zu λ_1)

$$\left(A - \lambda_1 J_2\right) v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-1-i} & -1 & 0 \\ 2 & 1-i & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = 1-i$$

vgl. Aufg. 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Wähle $v_2^1 = 1$ und erhalte

$$v_1^1 = \frac{v_2^1}{-1-i} = -\frac{1 \cdot (1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\Rightarrow v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Zu v^2:</u> (EV zu λ_2)

Es gilt: $\quad A v^1 = \lambda_1 v^1 \iff \overline{A v^1} = \overline{\lambda_1 v^1}$

A reell

$\iff A \overline{v^1} = \overline{\lambda_1}\, \overline{v^1} = \lambda_2 \overline{v^1}.$

D.h. $v^2 = \overline{v^1}$ ist EV zu λ_2.

Es gilt

$$v^2 = \overline{v^1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufg. 3

1. $z+w = -5-i\sqrt{2} + 2+i = -3 + (1-\sqrt{2})i$,

$$z \cdot w = (-5-i\sqrt{2})\cdot(2+i) = -10 - 5i - 2\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}$$

$$= -10+\sqrt{2} + (-5-2\sqrt{2})i.$$

2. $|z| = \left((-5)^2+(-\sqrt{2})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27}$.

3. $z = r\cdot(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r = |z| = \sqrt{27}$.

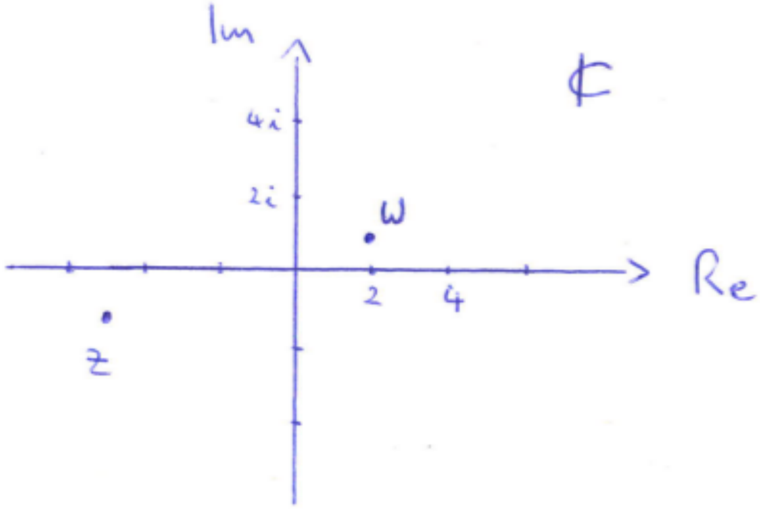
Für φ gilt nach Vorlesung ($-5<0$ und $-\sqrt{2}<0$!)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{-5}\right) - \pi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) - \pi.$$

4. $z^3 = r^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) \approx -95 - 103{,}24\,i$.

5. $$\frac{1}{z} = \frac{1}{-5-i\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(5-i\sqrt{2})}{-(5+i\sqrt{2})\cdot(5-i\sqrt{2})} = \frac{5-i\sqrt{2}}{-25+2i^2}$$

$$= -\frac{1}{27}(5-i\sqrt{2}) = -\frac{5}{27} + \frac{\sqrt{2}}{27}i.$$



Aufg. 4

Notw. Bed.: $\nabla f(x,y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y + 2 = 0 \iff y = -1$$

Hinr. Bed.: (vgl. Kap. 6, §1 Satz 2)

Untersuche $\nabla^2 f(1,-1)$ auf Definitheit!

Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = 0,$$

d.h. $\nabla^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zur Illustration verwende alle drei äquivalenten Kriterien zur Überprüfung auf Definitheit:

(i) Sei $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt mit $X = \binom{x}{y}$

$$X^T \nabla^2 f(1,-1) X = (x \; y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 2x^2 + 2y^2 > 0, \text{ da } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0.$$

(ii) Der einzige Eigenwert von $\nabla^2 f(1,-1)$ ist $\lambda = 2 > 0$.

(iii) Hauptunterdeterminanten von $\nabla^2 f(1,-1)$:

$$h_1 = \det(2) = 2 > 0,$$

$$h_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0.$$

$\overset{(i),\,(ii)\text{ oder }(iii)}{\Longrightarrow}$ $\nabla^2 f(1,-1)$ ist positiv definit!

$\Rightarrow$ $(1,-1)$ ist relatives Minimum!