Lösungen zu Blatt 5

Aufg. 1

a) Die Matrix A lautet (vgl. Zus.blatt 3, Aufg. 2 b))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 4 \\ 2a & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2a \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2a\,(2a-4) + 4\,(2a-4)$$

$$= -4a^2 + 16a - 16 = -4(a-2)^2 \neq 0$$

für $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Das bedeutet: A ist invertierbar für alle $a \neq 2$.

b) Wende das Determinantenkriterium für A an.

Es gilt

$$\det(A_1) = \det(0) = 0$$

=> A ist weder positiv noch negativ definit.

D.h. für $a \neq 2$ ist Q indefinit (A ist dann regulär), für $a = 2$ ist Q entartet.

c) Wende Satz 3 aus §3, Kapitel 5 an

mit $B = (-1, 1, 0)$ und $l = 1$, $N = 3$.

Setze damit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2a & 4 \\ 1 & 2a & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu berechnen:

$$\det(h_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a \\ 1 & 2a & 1 \end{vmatrix}, \quad \det(h_4) = \det(C).$$

Es gilt

$$\det(h_3) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= -1 - 2a - 2a = -4a - 1,$$

$$\det(h_4) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2a & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2a & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2a + 4 - 2a + 4 + 16$$

$$= 24 - 4a.$$

<u>Bedingungen:</u> $(l=1,\ N=3)$

- für positiv definit:

  - $\det(h_3) > 0 \iff a > -1/4$
  - $\det(h_4) > 0 \iff a > 6$

  D.h. für $a > 6$ ist Q positiv definit unter der NB $Bx = 0$.

- für negativ definit:

  $\left.\begin{array}{l} \det(h_3) > 0 \iff a < -1/4 \\ -\det(h_4) > 0 \iff a > 6 \end{array}\right\}$ nicht vereinbar!

  D.h. für kein $a \in \mathbb{R}$ ist Q negativ definit.

<u>Aufg. 2</u>

Char. Polynom:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) + (2 - 2 + 2\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2) + 2\lambda$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 3) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ EWe: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$

Eigenvektoren:

Zu λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Zeilen vertauschen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Setze $v_3^1 = 1 \Rightarrow v_2^1 = 1 \Rightarrow v_1^1 = -1$.

D.h. $v^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu λ_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{ZSF!}$$

Setze $v_3^2 = 1 \Rightarrow v_2^2 = 1 \Rightarrow v_1^2 = \frac{1}{2}$.

D.h. $v^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufg. 3

a) Notw. Bed.: $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -12x + 12y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -3y^2 + 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4x \qquad (2)$$

(1) und (2) liefern:

$$x^2 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4$$

Kandidaten sind also:

$$(x_1, y_1) = (0,0) \quad \text{bzw.} \quad (x_2, y_2) = (4,4).$$

Hinr. Bed.: (mittels EWe der Hessematrix)

Hessematrix:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -6y \end{pmatrix}$$

(i) $(x_1, y_1) = (0,0)$:

$$p(\lambda) = \det\left(\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 12 \\ 12 & -6\cdot 0 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 12\lambda + \lambda^2 - 144 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{180}, \quad \text{d.h. } \lambda_1 > 0$$

$$\text{und } \lambda_2 < 0$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 f(0,0)$ ist indefinit, also ist (x_1, y_1) ein Sattelpunkt.

(ii) $\underline{(x_2, y_2) = (4,4):}$

$$p(\lambda) = \det\left(\nabla^2 f(4,4) - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 12 \\ 12 & -6\cdot 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (12+\lambda)(24+\lambda) - 144$$

$$= \lambda^2 + 36\lambda + 144 \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_{1,2} = -18 \pm \sqrt{180}$, d.h. $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 f(4,4)$ ist negativ definit, also ist (x_2, y_2) ein lokales Maximum.

b) Es gilt

$$g(x,y) = -f(x,y).$$

$\overset{a)}{\Rightarrow}$ $(x,y) = (4,4)$ ist ein lokales Minimum.