Lösungen zu Blatt 6

Aufg. 1

a) 1. Es gilt: $D = \mathbb{R}_0^+$ ist konvex, denn für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\lambda x + (1-\lambda) y \geq 0 \implies \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathbb{R}_0^+.$$

Wende nun Satz 4 aus Kapitel 6, § 1 an. Berechne dazu:

$$f'(x) = -3x^2 \quad \text{und}$$

$$f''(x) = -6x \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_0^+.$$

$\implies$ $f''(x)$ ist negativ semidefinit für $x \in \mathbb{R}_0^+$

$\implies$ f ist konkav.

<u>Beachte</u>: Hier ist alles eindimensional! Vgl. den Stoff aus dem WS ...

2. Hier ist $D = \mathbb{R}^2$ $\rightsquigarrow$ konvex! Wende wieder Satz 4 an:

$$\partial_x g(x,y) = 4x^3 + 1, \quad \partial_y g(x,y) = 2y$$

$$\implies \nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die EWe von $\nabla^2 g(x,y)$ sind $12x^2$ und 2.

Damit sind die EWe von $\nabla^2 g(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$ größer gleich 0.

$\Rightarrow$ $\nabla^2 g(x,y)$ ist positiv semidefinit.

$\Rightarrow$ g ist konvex.

b) Nach Aufg. 2 b) vom normalen Übungsblatt gilt

$$\nabla^2 h(x) = -2C.$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 h(x)$ ist negativ definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$

(C ist positiv definit!)

$\overset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow}$ h ist strikt konkav.

<u>Beachte:</u> Auch hier ist $D = \mathbb{R}^n$ konvex!

c) Wende hier Satz 5 aus Kap. 6, § 1 an:

<u>Zu f:</u> für $\bar{x} = 0$ gilt $f'(\bar{x}) = 0$ $\overset{f \text{ konkav}}{\Rightarrow}$ $\bar{x} = 0$ ist globales Maximum.

<u>Zu g:</u> für $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}, 0\right)$ gilt $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$\overset{g \text{ konvex}}{\Rightarrow}$ $(\bar{x}, \bar{y})$ ist globales Minimum.

<u>Zu h:</u> Es gilt $\nabla h(x) = -2Cx + b$

(vgl. normales Übungsblatt, Aufg. 2b)).

D.h. $\nabla h(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = \frac{1}{2}C^{-1}b$

(beachte: C positiv definit $\Rightarrow$ C invertierbar)

$\overset{h \text{ konkav}}{\Longrightarrow}$ $\bar{x} = \frac{1}{2}C^{-1}b$ ist globales Maximum.

<u>Aufg. 2</u> (Polarkoordinaten)

Es gilt

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \det(Df(r,\varphi)) &= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \\ &= r\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} \\ &= r > 0 \end{aligned}$$

für $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, insbesondere gilt $\det(Df(r,\varphi)) \neq 0$

$\Rightarrow$ $Df(r,\varphi)$ ist für alle $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ + [0, 2\pi[$

invertierbar.

Aufg. 3

a) $h(r,\varphi) = (g \circ f)(r,\varphi) = g(f_1(r,\varphi), f_2(r,\varphi))$

$$= g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ r^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

b) Direkt:

$$D(g\circ f)(r,\varphi) = Dh(r,\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & r^2(-2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi) \\ 2r\sin\varphi\cos\varphi & r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & -4r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi\cos\varphi & r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{pmatrix}$$

Mit Kettenregel:

Es gilt nach der Kettenregel Matrixprodukt!

$$D(g\circ f)(r,\varphi) = \underbrace{Dg(f(r,\varphi))}_{\in \mathbb{R}^{2,2}} \cdot \underbrace{Df(r,\varphi)}_{\in \mathbb{R}^{2,2}}.$$

Weiter gilt

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$Dg(f(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

sowie mit Aufg. 2

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Also folgt

$$D(g\circ f)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & -4r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi\cos\varphi & r^2(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix}.$$