Lösungen zu Blatt 7

Aufg. 1

1. $Df(x_1,x_2) = \left(\partial_{x_1} f(x_1,x_2) \quad \partial_{x_2} f(x_1,x_2) \right) = (x_2 \quad x_1) \in \mathbb{R}^{1,2}$

2. $$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x,y) & \partial_y g_1(x,y) \\ \partial_x g_2(x,y) & \partial_y g_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y\exp(xy) & x\exp(xy) \\ \cos(x) & -\sin(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

3. $$Dh(x) = \begin{pmatrix} \partial_x h_1(x) \\ \partial_x h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,1} = \mathbb{R}^2$$

Hessematrix von f:

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1^2} f(x_1,x_2) & \partial^2_{x_1 x_2} f(x_1,x_2) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(x_1,x_2) & \partial^2_{x_2^2} f(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$\hat{=}$ symmetrisch!

Aufg. 2

Definiere die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x \exp(x(1-y_2)) - y_1 \\ -\cos(\pi x y_1) - y_2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$f(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \exp(0) - 1 \\ -\cos(\pi) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

sowie mit $y = (y_1, y_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x,y) & \partial_{y_2} f_1(x,y) \\ \partial_{y_1} f_2(x,y) & \partial_{y_2} f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -x^2 \exp(x(1-y_2)) \\ \pi x \sin(\pi x y_1) & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. $$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})\right) = 1 \neq 0, \quad \text{d.h.}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$ ist invertierbar. $\qquad (**)$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert somit lokal (d.h. in einer Umgebung von $\bar{x}$) eine Funktion φ mit

$$\varphi(\bar{x}) = \bar{y} \quad \text{und} \quad f(x, \varphi(x)) = 0 .$$

<u>Beachte:</u> Bei der Anwendung des Satzes über impl. Fkt.en müssen immer die beiden Bedingungen (*) und (**) nachgerechnet werden!

<u>Zu $\varphi'(1)$:</u> (vgl. auch Vorlesung)

Leite die Gleichung $f(x, \varphi(x)) = 0$ auf beiden Seiten nach x ab (<u>implizites Differenzieren</u>) und erhalte mit der Kettenregel

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}_{\in \mathbb{R}^{2,1}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}_{\in \mathbb{R}^{2,2}} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{\in \mathbb{R}^{2,1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) . \qquad (***)$$

("Matrixgleichung")

Da $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})$ invertierbar ist (siehe (**)),

kann man (***) bei $x = \bar{x} = 1$ nach

$\varphi'(x)$ auflösen. Mit $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (s.o.)

und $$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = \left.\begin{pmatrix} \exp(x(1-y_2)) + x\exp(x(1-y_2))(1-y_2) \\ \pi y_1 \sin(\pi x y_1) \end{pmatrix}\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(\bar{x}) \\ \varphi_2'(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen sofort: $\varphi_2'(\bar{x}) = 0$.

$\Rightarrow \varphi_1'(\bar{x}) = 1$.

<u>Also:</u> $\varphi'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Bemerkung:</u> (Fazit)

Auch ohne Kenntnis der genauen Form von φ bzw. φ' können wir durch implizites Differenzieren den Wert $\varphi'(\bar{x})$ berechnen!

Aufg. 3

a) Löse $g(x,y,z) = 0$ nach (y,z) auf:

$$y + z - 2x = 0, \qquad (i)$$
$$2z + 4 = 0. \qquad (ii)$$

(ii) liefert $z = -2$.

Einsetzen in (i): $y = 2x + 2$.

Die auflösende Funktion φ mit $g(x, \varphi(x)) = 0$ lautet also

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Untersuche nun

$$h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2 + 2x$$

auf Extrema: ("freie Extrema")

$$h'(x) = 2x + 2 \overset{!}{=} 0 \iff x = -1$$

$$h''(x) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ $(-1, \varphi(-1)) = (-1, 0, -2)$ ist ein lokales Minimum.

b) Die Lagrange-Funktion lautet für $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y + z + \lambda_1(y+z-2x) + \lambda_2(2z+4).$$

Ableiten von L liefert:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda) = y+z-2x \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda) = 2z+4 \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x - 2\lambda_1 \overset{!}{=} 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = 1 + \lambda_1 \overset{!}{=} 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \overset{!}{=} 0 \qquad (5)$$

(4) liefert $\lambda_1 = -1$. Einsetzen in (3) und (5) ergibt

$$x = -1, \quad \lambda_2 = 0.$$

(2) liefert $z = -2$. Einsetzen in (1):

$$y = 2 - 2 = 0.$$

$\Rightarrow$ mögliches Extremum: $(x,y,z) = (-1,0,-2)$

und $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 0)$.

Teil a) besagt, dass $(-1,0,-2)$ ein Minimum ist.