Lösungen zu Blatt 8

Aufg. 1

(i) Lagrange-Funktion:

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$
$$= x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

(ii) Notw. Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\lambda, x, y) = 1 + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\lambda, x, y) = 1 + 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \qquad (3)$$

(2) und (3) liefern

$$2\lambda x = 2\lambda y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

(beachte: $\lambda = 0$ ist nicht möglich!).

Einsetzen von $x = y$ in (1) ergibt

$$2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \;(= y)$$

Gleichung (2) liefert dann

$$\lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2\cdot\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\Rightarrow$ mögliche Extrema:

$$(x^*, y^*) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda^* = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(iii) Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung:

$$\hat{L}(x,y) = L(\lambda^*, x, y) = \underbrace{x+y}_{= f(x,y)} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(x^2+y^2-1)}_{= g(x,y)}.$$

Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \hat{L}(x,y) = \nabla^2 f(x,y) \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla^2 g(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wir haben also zwei Fälle zu untersuchen:

$$\nabla^2 \hat{L}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\nabla^2 \hat{L}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda^* = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1. Möglichkeit: (Determinantenkriterium)

Fall 1: $(x^*, y^*) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$Dg(x^*, y^*) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, d.h.

$$C(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Satz 5 aus Kapitel 6, § 3 liefert mit $N=2$, $\ell=1$:

$$(-1)^{1+1} \det(h_3) = \det(C(x^*, y^*)) = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} + \sqrt{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow$ $(x^*, y^*) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ist lokales Maximum von f unter der Nebenbed. $g(x,y) = 0$.

Fall 2: $(x^*, y^*) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hier ist

$$C(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$(-1)^1 \det(h_3) = -(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} > 0.$$

$\Rightarrow$ $(x^*, y^*) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ist lokales Minimum von f unter der Nebenbed. $g(x,y) = 0$.

2. Möglichkeit: (konvexe/konkave Lagrange-Fkt.)

Fall 1: $\left(\lambda^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\nabla^2 \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ hat für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

den einzigen Eigenwert $\lambda = -\sqrt{2} < 0$.

$\Rightarrow$ $Q(w) = w^T \nabla^2 \hat{L}(x,y)\, w$ ist neg. definit für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\hat{L}$ ist konkav auf $\mathbb{R}^2$.

Nach Satz 6 aus Kapitel 6, §3 ist $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ein lokales Max. von f unter der Nebenbed. $g(x,y) = 0$.

Fall 2: $\left(\lambda^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\nabla^2 \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ hat für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

den einzigen Eigenwert $\lambda = \sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow$ $Q(w) = w^T \nabla^2 \hat{L}(x,y)\, w$ ist pos. definit für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\hat{L}$ ist konvex auf $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ $(x^*, y^*) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist lokales Minimum von f unter der Nebenbed. $g(x,y) = 0$.

Aufg. 2

Wende wieder Satz 6 aus Kapitel 6, § 3 an.

Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \nabla^2 \hat{L}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \nabla^2 \hat{L}(x,y,z)$ hat für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Eigenwerte $2, 0 \ (\geq 0)$.

$\Rightarrow Q(w) = w^T \nabla^2 \hat{L}(x,y,z) w$ ist positiv semidefinit für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow \hat{L}$ ist konvex auf $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow (x^*, y^*, z^*) = (-1, 0, -2)$ ist lokales Minimum der Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$.

Aufg. 3

Lagrange-Funktion:

$$L(\lambda, x, y) = x - y + \alpha + \lambda\left(\tfrac{1}{2}x^2 + y - \beta\right).$$

Notw. Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x, y) = \tfrac{1}{2}x^2 + y - \beta \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\lambda, x, y) = 1 + \lambda x \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\lambda, x, y) = -1 + \lambda \overset{!}{=} 0 \qquad (3)$$

Gleichung (3) liefert $\lambda^* = 1$.

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad x^* = -1.$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad y^* = \beta - \tfrac{1}{2}$$

Optimalwertfunktion:

$$\phi(\alpha, \beta) = L(\lambda^*, x^*, y^*) = -1 - \beta + \tfrac{1}{2} + \alpha + \tfrac{1}{2} + \beta - \tfrac{1}{2} - \beta$$

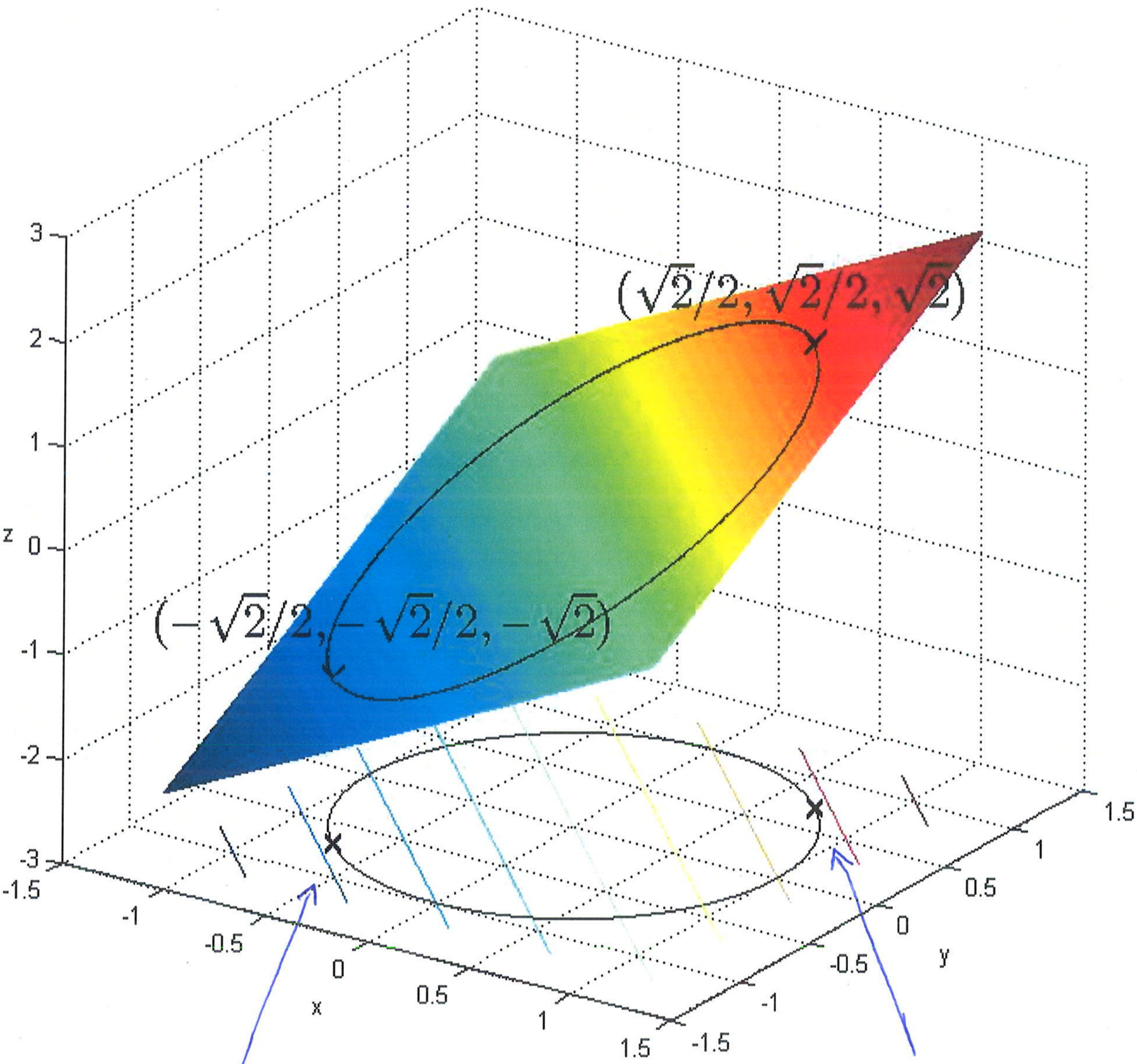
$$= \alpha - \beta - \tfrac{1}{2}.$$

Ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\phi(\alpha, \beta) = 1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x^*, y^*) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\phi(\alpha, \beta) = -1 = -\lambda^* \quad (\text{„Enveloppe-Theorem"}).$$

Zu Aufg. 1 (Veranschaulichung)



Minimum mit

$f(x^*, y^*) = -\sqrt{2}$

Maximum mit

$f(x^*, y^*) = \sqrt{2}$