Lösungen zu Blatt 9

Aufg. 1

(i) Lagrange - Funktion:

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$= x - y + \lambda\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)$$

(ii) Notw. Bedingungen 1. Ordnung:

$$\partial_\lambda L(\lambda, x, y) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_x L(\lambda, x, y) &= 1 + \lambda x \overset{!}{=} 0 \\ \partial_y L(\lambda, x, y) &= -1 + \lambda y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -y$$

($\lambda = 0$ nicht möglich!)

Gleichung (*) liefert mit $x = -y$

$$x^2 = 1 \iff x = \pm 1,$$

$$\Rightarrow y = \mp 1, \quad \Rightarrow \lambda = \mp 1$$

Mögliche Lösungen:

1. $(x^*, y^*) = (1, -1)$, $\lambda^* = -1$
2. $(x^*, y^*) = (-1, 1)$, $\lambda^* = 1$

(iii) Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung mit Satz 6 aus Kapitel 6, § 3:

Betrachte $\hat{L}(x,y) = x - y + \lambda^*(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1)$.

Fall ①:

$\hat{L}(x,y) = x - y - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1)$.

Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - x \\ -1 - y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 \hat{L}(x,y)$ hat den einzigen EW -1

$\Rightarrow$ $Q(\omega) = \omega^T \nabla^2 \hat{L}(x,y)\omega$ ist negativ definit

$\Rightarrow$ $\hat{L}$ ist konkav auf $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ (x^*, y^*) ist lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Fall ②:

$\hat{L}(x,y) = x - y + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1)$.

Es gilt f.a. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + x \\ -1 + y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 \hat{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2 \hat{L}(x,y)$ hat den einzigen EW $+1$

$\Rightarrow$ $Q(\omega) = \omega^T \nabla^2 L(x,y)\omega$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ $\hat{L}$ ist konvex auf $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ (x^*, y^*) ist lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

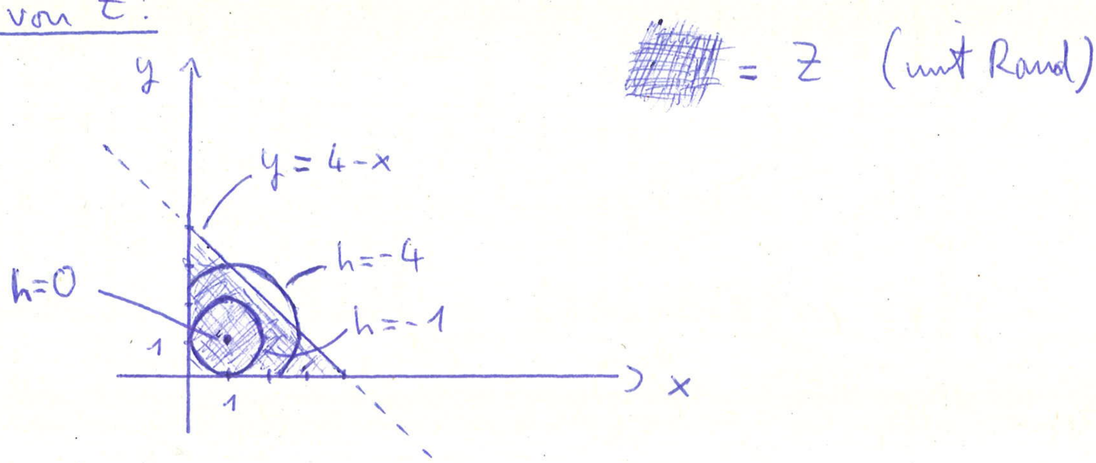
Aufg. 2

a) Definiere $k_1(x,y) = 4-x-y$, $k_2(x,y) = x$, $k_3(x,y) = y$.

Damit lautet die Menge der zulässigen Punkte:

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : k_1(x,y) \geq 0,\ k_2(x,y) \geq 0,\ k_3(x,y) \geq 0\}.$$

Skizze von Z:



Höhenlinien von f:

$f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 = h$, $h = 0, -1, -4$

$h=0$: Punkt $(x,y) = (1,1)$

$h=-1$: Kreis um $(1,1)$ mit Radius 1

$h=-4$: Kreis um $(1,1)$ mit Radius 2

b) Lagrange - Funktion: $(N=2,\ l=0,\ m=3)$

$$L(\mu_1,\mu_2,\mu_3,x,y,\omega_1,\omega_2,\omega_3) = f(x,y) + \mu_1(k_1(x,y)-\omega_1^2)$$

$$+\mu_2(k_2(x,y)-\omega_2^2) + \mu_3(k_3(x,y)-\omega_3^2)$$

$$= -(x-1)^2-(y-1)^2 + \mu_1\cdot(4-x-y-\omega_1^2) + \mu_2\cdot(x-\omega_2^2) + \mu_3\cdot(y-\omega_3^2).$$

Kuhn-Tucker-Bedingungsgleichungen:

$$\partial_x L = -2(x-1) - \mu_1 + \mu_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\partial_y L = -2(y-1) - \mu_1 + \mu_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_1 \cdot (4-x-y) = 0 \qquad (3)$$

$$\mu_2 \geq 0, \quad \mu_2 \cdot x = 0 \qquad (4)$$

$$\mu_3 \geq 0, \quad \mu_3 \cdot y = 0 \qquad (5)$$

Ferner muss $(x,y) \in Z$ erfüllen, d.h.

$$4-x-y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Annahme $\mu_1 = 0$: (vgl. Gleichung in (3))

Angenommen $x = 0$ (vgl. (4)) $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\mu_2 = -2$, ↯ zu $\mu_2 \geq 0$. $\Rightarrow$ $x \neq 0$ und $\mu_2 = 0$.

Angenommen $y = 0$ (vgl. (5)) $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\mu_3 = -2$, ↯ zu $\mu_3 \geq 0$ $\Rightarrow$ $y \neq 0$ und $\mu_3 = 0$.

Damit folgt aus (1) und (2):

$$x = 1 \quad \text{und} \quad y = 1.$$

Annahme $\mu_1 \neq 0$:

Gleichung (3) liefert dann $y = 4 - x$. (*)

Angenommen $x = 0$ (vgl. (4)) $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $y = 4$

$\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $\mu_3 = 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\mu_1 = -2(4-1) = -6$, ↯ zu $\mu_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \neq 0$ und $\mu_2 = 0$

Angenommen $y = 0$ (vgl. (5)) $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $x = 4$

$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\mu_2 = 0$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\mu_1 = -2(4-1) = -6$, ↯ zu $\mu_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ $y \neq 0$ und $\mu_3 = 0$

Gleichungen (1) und (2) liefern damit

$$2(x-1) = 2(y-1) \overset{(*)}{=} 2(3-x) = 6-2x$$

$\Rightarrow$ $4x = 8$ $\Rightarrow$ $x = 2$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\mu_1 = -2(2-1) = -2$, ↯ zu $\mu_1 \geq 0$.

Insg.:

Einzige Lösung ist

$$(x^*, y^*) = (1,1) \text{ und } (\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) = (0,0,0),$$

wobei $(x^*, y^*) \in Z$. Nach der Skizze aus Teil a) müsste dies ein lokales Maximum sein.

Aufg. 3

Es gilt mit der Produktregel

$$x'(t) = 1 \cdot \exp(t^2) + t \cdot \exp(t^2) \cdot 2t$$
$$= \exp(t^2) + 2t \cdot x(t)$$
$$= f(t, x(t)),$$

wobei $f(t,x) = \exp(t^2) + 2t \cdot x$.