Lösungen zu Blatt 10

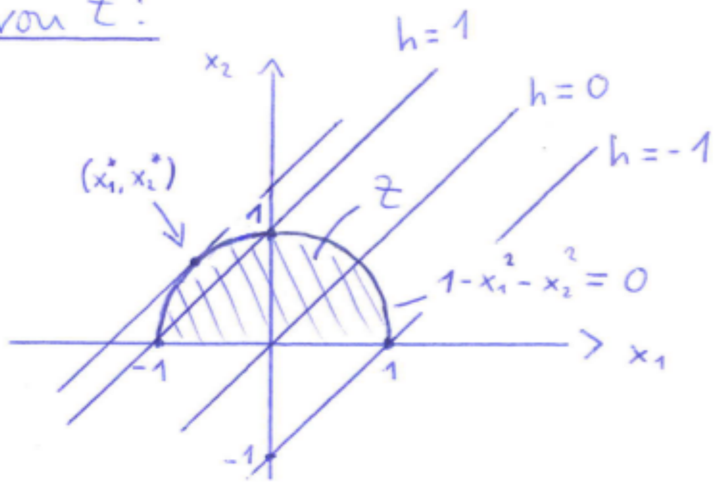
Aufg. 1

a) Die Menge der zul. Punkte lautet

$$Z = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1(x_1,x_2) \geq 0,\ k_2(x_1,x_2) \geq 0 \}$$

mit $k_1(x_1,x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, $k_2(x_1,x_2) = x_2$.

Skizze von Z:



Höhenlinien von f:

$$f(x_1,x_2) = x_2 - x_1 = h, \quad \text{d.h.}$$

$$x_2 = x_1 + h, \quad h = -1, 0, 1.$$

b) Lagrange-Fkt.: $(N=2,\ l=0,\ m=2)$

$$L(\mu, x, y) = f(x_1,x_2) + \mu_1 (k_1(x_1,x_2) - y_1^2) + \mu_2 (k_2(x_1,x_2) - y_2^2)$$

$$= x_2 - x_1 + \mu_1 (1 - x_1^2 - x_2^2 - y_1^2) + \mu_2 (x_2 - y_2^2) .$$

KT-Gleichungen:

$$\partial_{x_1} L(\mu, x, y) = -1 - 2\mu_1 x_1 = 0, \qquad (1)$$

$$\partial_{x_2} L(\mu, x, y) = 1 - 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0, \qquad (3)$$

$$\mu_2 \geq 0, \quad \mu_2 x_2 = 0. \qquad (4)$$

Ferner muss $(x_1, x_2) \in Z$ erfüllt sein.

(1) $\Rightarrow$ $\mu_1 \neq 0$, d.h. $\mu_1 > 0$.

(3) $\Rightarrow$ $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$. $\qquad (*)$

(2) $\Rightarrow$ $\mu_2 = -1 + 2\mu_1 x_2$.

Angenommen $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\mu_2 = -1$, ↯ $\Rightarrow$ $x_2 > 0$.

(4) $\Rightarrow$ $\mu_2 = 0$.

(1) und (2) liefern dann:

$$2\mu_1 x_1 = -2\mu_1 x_2 \quad \overset{\mu_1 > 0}{\Longleftrightarrow} \quad x_1 = -x_2$$

$(*)$ $\Rightarrow$ $1 = 2x_1^2$, d.h. $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ entfällt wegen $x_2 \geq 0$.

D.h. insg.:

$$x_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \mu_1^* = \frac{-1}{2x_1^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2^* = 0,$$

mit $(x_1^*, x_2^*) \in Z$.

Nach der Skizze aus a) ist dies ein lokales Maximum.

c) Hier ist $f: D \to \mathbb{R}$, $k_i: D \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$
mit $D = \mathbb{R}^2$, d.h. D ist konvex.

Zu f:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu k_1:

$$\nabla k_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 k_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Zu k_2:

$$\nabla k_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 k_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ alle EWe von $\nabla^2 f(x_1,x_2), \nabla^2 k_1(x_1,x_2), \nabla^2 k_2(x_1,x_2)$ sind ≤ 0

$\Rightarrow$ $\nabla^2 f(x_1,x_2), \nabla^2 k_1(x_1,x_2), \nabla^2 k_2(x_1,x_2)$ neg. semidefinit

$\Rightarrow$ $f, k_1, k_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konkav

D.h. wir haben ein konkaves Optimierungsproblem.

Satz 2 aus Kapitel 6, § 3 besagt nun: Die Lsg. aus b) ist ein globales Maximum von f unter den NBen $k_i \geq 0$, $i = 1,2$.

Aufg. 2

Gegeben: $x'(t) = t^2 \cdot (x(t))^2$, $x(1) = 1$.

Separation der Variablen mit $h(t) = t^2$ und $g(x) = x^2$:

$$\int_{x(1)}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi^2} = \int_1^t \tau^2 \, d\tau \quad \Leftrightarrow$$

$$-\xi^{-1} \Big|_1^{x(t)} = \frac{1}{3} \tau^3 \Big|_1^t \quad \Leftrightarrow$$

$$-(x(t))^{-1} + 1 = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$x(t) = \frac{3}{4 - t^3}$$

Probe:

$$x(1) = \frac{3}{4-1} = 1 \quad \checkmark$$

$$x'(t) = -3(4-t^3)^{-2} \cdot (-3t^2) = t^2 \cdot \frac{9}{(4-t^3)^2} = t^2 \cdot (x(t))^2 \quad \checkmark$$