Lösungen zu Blatt 11

Aufg. 1

Die Dgl. hat die Form

$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (*)$$

mit $a(t) = -\frac{1}{t}$, $b(t) = t^2 + 1$, $t_0 = 1$ und $x_0 = 1$

für $t \geq 1$ (d.h. $J = [1, \infty)$).

Lösungsformel für $(*)$:

$$x(t) = y(t)\,x_0 + y(t) \int_{t_0}^{t} y(s)^{-1}\, b(s)\, ds$$

$$= y(t) + y(t) \int_{1}^{t} y(s)^{-1} (s^2 + 1)\, ds$$

mit $y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right) = \exp\left(-\int_{1}^{t} \frac{1}{\tau}\, d\tau \right)$

$$= \exp\left(-\ln(\tau) \Big|_1^t \right) = \exp\left(-\ln(t) + \underbrace{\ln(1)}_{=0} \right)$$

$$= \exp\left(\ln\left(\tfrac{1}{t}\right) \right) = \frac{1}{t}$$

Daraus folgt

$$x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \int_{1}^{t} \left(\frac{1}{s}\right)^{-1} (s^2 + 1)\, ds$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\int_1^t s^3 + s \, ds$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\left(\frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_1^t$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{4 + t^4 + 2t^2 - 3}{4t}$$

$$= \frac{(t^2+1)^2}{4t}$$

Verhalten für $t \to \infty$: Für große t gilt

$$x(t) \approx \frac{t^4}{4t} = \frac{1}{4}t^3 \to \infty \text{ für } t \to \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \infty .$$

Aufg. 2

a) Erhalte die allg. Lsg. aus den EWen und EVen der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 + 4 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 5 \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = \begin{cases} -1+2i \\ -1-2i \end{cases}$$

Zugehörige Eigenvektoren:

Löse $\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-2i} & 1 & 0 \\ -4 & -2i & 0 \end{array}\right) \lambda = 2i$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Setze $v_2^1 = 1$ (letzte Komponente auf 1 normiert)

und erhalte mit

$$v_1^1 = \frac{1}{-2i} \cdot (-v_2^1) = \frac{i}{-2i^2} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{2} i$$

den EV

$$v^1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum EW $\lambda_1 = -1 + 2i$.

EV v^2 zum EW $\lambda_2 = -1 - 2i$:

$$v^2 = \overline{v^1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Basislösungen (vgl. Vorlesung)

$$x^1(t) = u(t) = \exp(-t)\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \sin(2t)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-t}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$x^2(t) = w(t) = \exp(-t)\left(\cos(2t)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + \sin(2t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}. \qquad [\text{verwende hier } v^1 \text{ und } \lambda_1]$$

(<u>beachte</u>: $x^1(t)$ und $x^2(t)$ sind reell!)

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t)$$

$$= c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}.$$

b) Mit Teil a) folgt

$$x(0) = c_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $c_1 = 1$ und $c_2 = -2$.

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)\\ \cos(2t) - 2\sin(2t)\end{pmatrix}.$$

c) Wegen $|\sin(2t)| \leq 1$, $|\cos(2t)| \leq 1$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$

gilt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufg. 3

Allg. Lsg.:

Homogene Gleichung: $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 0$.

Der Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ liefert

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \iff$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \iff$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}.$$

Dies liefert die zwei reellen Basislösungen

$$x^1(t) = e^t \quad \text{und} \quad x^2(t) = e^{-3t}.$$

Inhomogene Gleichung: $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 2$.

$\Rightarrow x_p(t) = -\frac{2}{3}$ (partikuläre Lsg.).

Insg.:

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + x_p(t)$$

$$= c_1 e^t + c_2 e^{-3t} - \frac{2}{3}.$$

Lösung mit Anfangswerten:

Es gilt

$$x'(t) = c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t}.$$

Damit erhalten wir das LGS (in c_1 und c_2)

$$x(0) = c_1 + c_2 - \tfrac{2}{3} = 1,$$

$$x'(0) = c_1 - 3c_2 = 1.$$

Die zweite Gleichung liefert

$$c_1 = 1 + 3c_2.$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 3c_2 + c_2 - \tfrac{2}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 1 + 3 \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Also:

$$x(t) = \tfrac{3}{2} e^{t} + \tfrac{1}{6} e^{-3t} - \tfrac{2}{3}.$$