Skript zum Vorkurs

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Wintersemester 2024/25

Felix Kleber

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Vorwort

Das vorliegende Skript beinhaltet den Stoff des Vorkurses *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* an der Universität Konstanz vom 28. bis 30. September 2015.

Das Skript soll den Studienanfängern/innen in Wirtschaftswissenschaften als Auffrischung des Schulstoffes dienen und helfen den Übergang von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik zu meistern. Im Besonderen ist der Vorkurs für Studienanfänger/innen gedacht, bei denen zwischen der erworbenen Hochschulreife und dem Studienbeginn ein größerer Zeitabstand liegt.

Der behandelte Stoff bietet eine Zusammenfassung einer Auswahl wichtiger Themen der Schulmathematik auf dem Niveau eines sechsstündigen Kurses und enthält eine zusätzliche Vorbereitung auf die mathematischen Lehrinhalte des VWL-Studiums. Unter anderem sind folgende Themen Inhalt des Vorkurses:

- Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen,
- elementare Funktionen (z. B. die Exponentialfunktion),
- Rechnen mit Beträgen,
- grundlegende Ableitungs- und Integrationsregeln.

Zu beachten ist jedoch, dass der hier vorgestellte Stoff kein komplettes Nachschlagewerk für die Schulmathematik ist. Vielmehr werden die oben genannten Themen anhand von Beispielen erörtert, um so die wichtigsten Regeln und Rechentechniken aufzufrischen und gegebenenfalls zu erneuern.

Konstanz, den 29. September 2015 Felix Kleber

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

In diesem Kapitel geht es um einige grundlegende Rechenfertigkeiten aus der Schule. Die hierbei auftauchenden Bezeichnungen und mathematischen Notationen werden als bekannt vorausgesetzt, wie z. B. das Symbol $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen.

1.1 Grundlegende Rechenregeln und Binomische Formeln

Im Folgenden bezeichnen $a, b, c \in \mathbb{R}$ (oder auch x, y, z etc.) beliebige reelle Zahlen. Es gelten folgende Rechengesetze:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && a+b=b+a, \quad a \cdot b=b \cdot a, \\
&\text{(II)} && (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c, \quad (a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)=a \cdot b \cdot c, \\
&\text{(III)} && a \cdot(b+c)=a \cdot b+a \cdot c.
\end{aligned}
$$

Dabei sind (I) das Kommutativgesetz, (II) das Assoziativgesetz und (III) das Distributivgesetz. Weitere Rechenregeln sind:

$$
\begin{aligned}
-(a+b)&=-a-b, \quad -(a-b)=-a+b, \\
(-a)b=a(-b)&=-ab, \quad (-a)(-b)=ab, \\
\frac{(-a)}{b}=\frac{a}{(-b)}&=-\frac{a}{b}, \quad \frac{(-a)}{(-b)}=\frac{a}{b},
\end{aligned}
$$

wobei in der letzten Zeile $b \neq 0$ sein muss („Man darf durch Null nicht teilen!“).

1.1 Beispiel (Vereinfachen eines Terms)
Für drei Variablen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\begin{aligned}
4(3a-2b+2(b+3a+c-2(c+2a-3b))) &= 4(3a-2b+2(b+3a+c-2c-4a+6b)) \\
&= 4(3a-2b+2(-a+7b-c)) \\
&= 4(3a-2b-2a+14b-2c) \\
&= 4(a+12b-2c) \\
&= 4a+48b-8c.
\end{aligned}
$$

Für das Rechnen mit Zahlen und Variablen gelten folgende wichtige Formeln, die man auswendig können sollte:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2, \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2.
\end{aligned}
$$

Dies sind die sogenannten **Binomischen Formeln**, welche man folgendermaßen beweisen kann:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = (a+b)(a+(-b)) = aa + a(-b) + ba + b(-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

1.2 Beispiel (Anwenden der Binomischen Formeln)

(i) $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$.

(ii) $4a^2 - 20a + 25 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = (2a-5)^2$.

(iii) $(4p+5q)(4p-5q) = (4p)^2 - (5q)^2 = 16p^2 - 25q^2$.

1.2 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Für beliebige reelle Zahlen $a \neq 0, b \neq 0$ und ganzzahlige Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden **Potenzgesetze**:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$
$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

Aus diesen Gesetzen kann man für $m = n$ und $m = 0$ folgende Gleichheiten folgern:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Die Wurzel einer Zahl $a \geq 0$ wird auf folgende Weise definiert: Zu jedem $a \geq 0$ kann man zeigen, dass es genau eine reelle Zahl $x \geq 0$ gibt, welche die Gleichung

$$x^n = a$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ löst. Diese Lösung bezeichnet man mit $x = \sqrt[n]{a}$ und nennt sie **n-te Wurzel** aus a (für $n = 2$ schreibt man einfach $\sqrt{a}$). Wurzeln sind Potenzen mit rationalen Hochzahlen, es gilt nämlich

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Auch hier gelten die Potenzgesetze von oben.

1.3 Beispiel (Anwenden der Potenzgesetze)

(i) $\sqrt{3u} \cdot \sqrt{u} = (3u)^{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} = (3u^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3u^2}$.

(ii) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{0,9} = \sqrt{10 \cdot 0,9} = \sqrt{9} = 3$.

(iii) $(3a^2)^m \cdot (2a)^n = 3^m \cdot (a^2)^m \cdot 2^n \cdot a^n = 3^m \cdot a^{2m} \cdot 2^n \cdot a^n = 3^m \cdot 2^n \cdot a^{2m+n}$.

Wir betrachten im Folgenden nun die Gleichung

$$a^x = b$$

für reelle Zahlen $a > 0,\ b > 0$, wobei $a \neq 1$ sein soll, da die Gleichung sonst trivial ist. Wir suchen in dieser Gleichung die Größe x. Dieses x ist gegeben durch

$$x = \log_a(b)$$

und heißt der **Logarithmus** von b zur Basis a. Wichtige Sonderfälle sind

$$\log_a(a) = 1, \quad \log_a(1) = 0, \quad \log_a(a^x) = x.$$

Analog zu den Potenzgesetzen gibt es die sogenannten **Logarithmusgesetze**: Es gilt für $u > 0,\ v > 0$ und $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \log(uv) &= \log(u) + \log(v), \\ \log\left(\frac{u}{v}\right) &= \log(u) - \log(v), \\ \log(u^k) &= k \log(u). \end{aligned}$$

Die Basis a wurde hier weggelassen. Die Gleichungen gelten also für beliebige Basen $a > 0$. Falls die Basis a die **Eulersche Zahl** $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$ ist, so schreibt man

$$\ln(b) = \log_{\mathrm{e}}(b)$$

und nennt „ln“ den **natürlichen Logarithmus**.

1.4 Beispiel (Rechnen mit Logarithmen)

(i) $\frac{2}{3}(\log(u) - \log(v)) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{u}{v}\right)^2}\right)$.

(ii) $\log\left(\frac{2a^3\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}\right) = \log(2) + 3\log(a) + \frac{1}{2}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(c) - 2\log(a+c)$.

(iii) *Betrachte nochmal die Gleichung $a^x = b$ von oben. Nach Definition des Logarithmus gilt*

$$x = \log_a(b).$$

Logarithmiert man die Gleichung $a^x = b$ zur Basis e, so ergibt sich

$$\ln(a^x) = \ln(b) \quad \Rightarrow \quad x\ln(a) = \ln(b) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

Damit erhalten wir folgenden Zusammenhang:

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

1.3 Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Gleichungen und Ungleichungen, die sich mit grundlegenden rechentechnischen Operationen und äquivalenten Umformungen (durch „$\Leftrightarrow$“ gekennzeichnet) lösen lassen.

Unter einer Gleichung versteht man allgemein den Ausdruck

$$A(x) = B(x).$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ A(x) = B(x) \text{ ist eine wahre Aussage}\} .$$

Analoge Bezeichnungen verwendet man, falls man ein Gleichungssystem betrachtet, bei dem mehrere Variablen auftreten.

1.5 Beispiel
Zu lösen ist die Gleichung

$$3x + 5 = 2x - 1.$$

Es gilt

$$3x + 5 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2x = -1 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6.$$

Die Lösungsmenge ist also gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ x = -6\} = \{-6\} .$$

Im Folgenden werden typische Beispiele von Gleichungen angegeben, die in vielen Anwendungen auftreten können. Die zugehörigen Lösungstechniken werden jeweils beispielhaft vorgeführt.

1.6 Beispiel (Lineare Gleichung mit einer Unbekannten)
Allgemeine Gleichung:

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0).$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\} .$$

1.7 Beispiel (Lineare Gleichung mit zwei Unbekannten)
Allgemeine Gleichung:

$$ax + by = c \quad (a \neq 0, \ b \neq 0).$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right\} .$$

Geometrische Interpretation: Lösungen sind Punkte auf einer Geraden in der (x, y)*-Ebene.*

1.8 Beispiel (Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)
Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Lösung mittels ***Gleichsetzungsverfahren*** *anhand folgendem Beispiel:*

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= -1 \\ 2x - 5y &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} + 2x \\ y &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$-\frac{1}{2} + 2x = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{5}x = \frac{3}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{16}.$$

Für y erhält man

$$y = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{16} = -\frac{1}{8}.$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{3}{16}, -\frac{1}{8}\right)\right\}$. Geometrische Interpretation: Die Lösung $\left(\frac{3}{16}, -\frac{1}{8}\right)$ ergibt sich als Schnitt der beiden Geraden $y = -\frac{1}{2} + 2x$ und $y = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x$.

Weitere Verfahren zum Lösen des Gleichungssystems aus dem letzten Beispiel sind das aus der Schule bekannte **Eliminationsverfahren** bzw. **Einsetzungsverfahren**.

1.9 Beispiel (Lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten)
Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_1. \end{aligned}$$

Lösung mittels des ***Gaußschen Eliminationsverfahren (Gauß-Algorithmus)*** *anhand folgendem Beispiel:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 12 \\ 3x & - & 8y & - & z & = & 9 \\ 10x & + & 5y & - & 2z & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 12 \\ & - & 5y & - & 16z & = & -27 \\ & & 15y & - & 52z & = & -119 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 12 \\ & - & 5y & - & 16z & = & -27 \\ & & & - & 100z & = & -200. \end{array}$$

Das letzte Gleichungssystem ist in ***Dreiecksform*** *und kann schrittweise von unten her gelöst werden:*

$$\begin{aligned} z &= 2, \\ y &= -\frac{1}{5}(-27 + 16 \cdot 2) = -1, \\ x &= 12 - 5 \cdot 2 + (-1) = 1. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist gegeben durch $\mathbb{L} = \{(1, -1, 2)\}$.

1.10 Beispiel (Quadratische Gleichung mit einer Unbekannten)
Allgemeine Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Lösung der Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(„\textbf{Mitternachtsformel}“).}$$

Ist die quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

gegeben, so erhält man die Lösung mit der p-q-***Formel****:*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

1.11 Beispiel (Bruchgleichungen mit einer Unbekannten)
Bruchgleichungen kann man nach folgendem Schema lösen:

1. *Definitionsmenge bestimmen;*
2. *Hauptnenner bilden;*
3. *Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren;*
4. *bruchfreie Gleichung lösen, dabei aber die Definitionsmenge beachten.*

Betrachte folgendes Beispiel:

$$\frac{x-5}{2x+4} - \frac{x-3}{2x-2} = \frac{5x}{x+2} - 5.$$

Wir verwenden obiges Schema:

1. *Definitionsmenge:* $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2, 1\}$.
2. *Hauptnenner:* $2(x+2)(x-1)$ *(„kleinstes gemeinsames Vielfaches“).*
3. *Gleichung mit* $2(x+2)(x-1)$ *als Hauptnenner:*

   $$\frac{(x-5)(x-1)}{2(x+2)(x-1)} - \frac{(x-3)(x+2)}{2(x+2)(x-1)} = \frac{5x \cdot 2(x-1)}{2(x+2)(x-1)} - \frac{5 \cdot 2(x+2)(x-1)}{2(x+2)(x-1)},$$

   anschließend mit $2(x+2)(x-1)$ *durchmultiplizieren:*

   $$(x-5)(x-1) - (x-3)(x+2) = 10x(x-1) - 10(x+2)(x-1).$$

4. *Bruchfreie Gleichung lösen:*

$$x^2 - 6x + 5 - (x^2 - x - 6) = 10x^2 - 10x - (10x^2 + 10x - 20) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{5}.$$

Es gilt $x = \frac{3}{5} \in \mathbb{D}$, *d. h.* $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

1.12 Beispiel (Wurzelgleichung mit einer Unbekannten)
Schema für Wurzelgleichungen:

1. *Wurzel isolieren;*
2. *Quadrieren;*
3. *wurzelfreie Gleichung lösen;*
4. *Kontrolle.*

Betrachte folgendes Beispiel:

$$x + 2\sqrt{x - 2} = 1.$$

Wir verwenden wieder das gegebene Schema:

1. *Wurzel isolieren:* $2\sqrt{x-2} = 1 - x$.
2. *Quadrieren:* $4(x - 2) = 1 - 2x + x^2$.
3. *Lösen:* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *hat die Lösung* $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$.
4. *Kontrolle: Setze* $x = 3$ *in die Ausgangsgleichung ein und erhalte*

$$3 + 2\sqrt{1} = 5 \neq 1.$$

Ergebnis: $\mathbb{L} = \{\}$, *d. h. die Gleichung hat keine Lösung.*

Anmerkung zum letzten Beispiel: Dass die gefundene „Lösung“ $x = 3$ die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllt liegt daran, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Im obigen Fall gilt nämlich

$$4(x - 2) = 1 - 2x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x-2} = 1 - x \text{ oder } -2\sqrt{x-2} = 1 - x,$$

d. h. die Implikation

$$4(x - 2) = 1 - 2x + x^2 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x-2} = 1 - x$$

ist falsch. Tatsächlich ist $x = 3$ die Lösung der Gleichung

$$x - 2\sqrt{x - 2} = 1.$$

Den Rest dieses Abschnittes geht es um Ungleichungen. Diese haben allgemein die Form

$$A(x) \leq B(x).$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist analog zu den Gleichungen gegeben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ A(x) \leq B(x) \text{ ist eine wahre Aussage}\}.$$

1.13 Beispiel
Gegeben: $x+1 \leq -x+5$. *Es gilt*

$$x+1 \leq -x+5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2.$$

Die Lösungsmenge ist also gegeben durch $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \, x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

1.14 Beispiel
Gegeben: $x^2 + 2x - 3 < 0$. *Es gilt*

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 < 2 \text{ und } x+1 > -2 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 < x < 1, \end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \, -3 < x < 1\} = (-3, 1)$.

1.15 Beispiel
Gegeben: $\frac{x+1}{x} \geq 2$. *Um diese Ungleichung zu lösen bietet es sich an beide Seiten mit* x *zu multiplizieren. Da wir es hier mit einer Ungleichung zu tun haben, muss man dabei auf das Vorzeichen von* x *achten. Deswegen macht man eine Fallunterscheidung:*

(i) $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 \geq 2x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq x. \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 \leq 2x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq x. \end{aligned}$$

Fall (ii) sagt, es muss gelten: $x < 0$ *und* $x \geq 1$. *Da dies aber nicht möglich ist, bleibt für die Lösungsmenge nur Fall (i) übrig:* $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \, 0 < x \leq 1\} = (0, 1]$.

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

a) Schreiben Sie ohne Klammern: $(u+v)(2u+3v-4w)$, $((2a)^2-x)((2a)^2+x)$, $(y-3x)^2$.

b) Klammern Sie aus: $5xy^2 + 10x^2y$, $3xy^2z^3 - 12x^2y^3z + 9x^3yz^2$.

c) Faktorisieren Sie: $16 - y^2$, $20rs + 100r^2 + s^2$, $4a^2 - 24a + 36$.

Aufgabe 2

a) Vereinfachen Sie: $(ab)^2 \cdot b^n,\ \ x^{m-2} \cdot x^{-m+2},\ \ \frac{(x+y)^{-2}}{x+y}$.

b) Berechnen bzw. vereinfachen Sie: $\sqrt{n^2+2n+1},\ \ \sqrt{\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x+y}},\ \ \frac{\sqrt{49x^3}}{7\sqrt{x}}$.

c) Bestimmen Sie den Logarithmus: $\log_2(32),\ \log_6\left(\sqrt[3]{6}\right),\ \log_3\left(\frac{1}{9}\right),\ \log_a\left(\sqrt[q]{a^p}\right),\ \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}\right)$.

d) Zerlegen Sie: $\ln\left(\frac{a^3b^2c}{d^4}\right),\ \ \ln(u^2-1)$.

e) Fassen Sie zusammen: $\log(4) - \log(2) + \log(3),\ \ \frac{1}{3}\log\left(a^{3m}\right) - (m+1)\log(a)$.

Aufgabe 3

a) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme zeichnerisch und rechnerisch:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \qquad & x + y &= 1 \\ x - 2y &= 4, \qquad & x + y &= 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x + 3y + z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$2x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \quad \text{und} \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

b) Für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^2 - 2x + c = 0$$

eine/keine/zwei Lösung(en)?

Aufgabe 5

a) Lösen Sie folgende Bruchgleichung:

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{2x+7}{x+3} + \frac{6}{x-2}.$$

b) Lösen Sie folgende Wurzelgleichung:

$$2 + \sqrt{3x(x-2)} = x.$$

c) Lösen Sie folgende Exponentialgleichung:

$$6\,\mathrm{e}^{-4x} = 3.$$

Aufgabe 6

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{x}{x+2} < 0, \qquad \frac{x+1}{x-1} \leq 2, \qquad \frac{3}{x-5} < \frac{2}{x+3}.$$

Aufgabe 7

Leiten Sie die Mitternachtsformel für die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

her.

2 Elementare Funktionen

Dieses Kapitel befasst sich mit einer Reihe von elementaren Funktionen und rekapituliert deren wichtigste Eigenschaften (Nullstellen, Monotonie, Verhalten im Unendlichen,...).

Unter einer Funktion f versteht man allgemein eine Abbildungsvorschrift der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$ der Definitionsbereich und $\mathbb{W}_f \subset \mathbb{R}$ der Wertebereich der Funktion f.

2.1 Lineare Funktionen

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = ax + b. \end{aligned}$$

Dabei ist $a \neq 0$ die Steigung der Funktion.

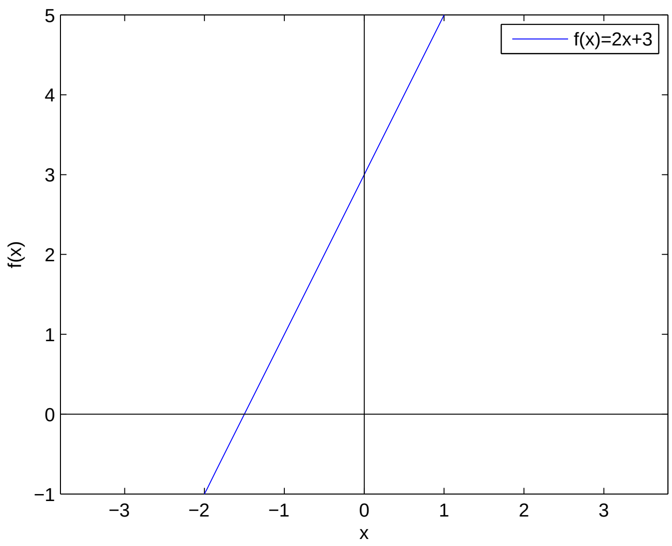

Abbildung 2.1: Beispiel einer linearen Funktion.

Eigenschaften:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.

- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = b$.
- Monotonie: Fall $a > 0$: f ist streng monoton steigend. Fall $a < 0$: f ist streng monoton fallend.
- Beschränktheit: Die Funktion ist für $x \to \pm\infty$ unbeschränkt, sie wächst also in beide Richtungen ins Unendliche.
- Spezialfall: Für $a = 0$ ist die Funktion eine Konstante, d. h. eine waagrechte Linie. In diesem Fall ist die Funktion natürlich beschränkt.

2.1 Beispiel (Punkt-Steigungs-Form)
Aufgabe: Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt $(2, -3)$ *geht und die Steigung* -2 *besitzt? Allgemeiner Ansatz mit Punkt* (x_1, y_1) *und Steigung* m*:*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Hier: $(x_1, y_1) = (2, -3)$ *und* $m = -2$*. Damit folgt*

$$\frac{y + 3}{x - 2} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1.$$

2.2 Quadratische Funktionen

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, falls $b^2 - 4ac \geq 0$ (Mitternachtsformel).
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = c$.
- Monotonie: Fall $a > 0$: Bis zum Scheitelpunkt ist f streng monoton fallend, danach streng monoton steigend. Fall $a < 0$: Bis zum Scheitelpunkt ist f streng monoton steigend, danach streng monoton fallend.
- Beschränktheit: Fall $a > 0$: Die Funktion ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Fall $a < 0$: Hier ist es genau umgekehrt, die Funktion ist nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt, vgl. Abbildung 2.2.

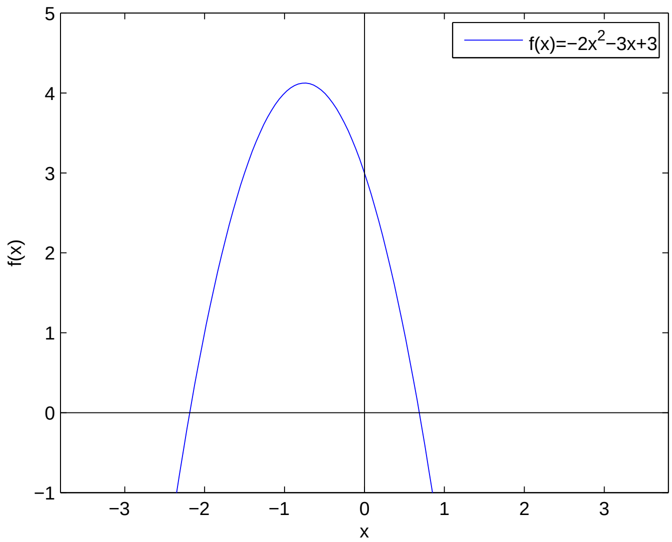

Abbildung 2.2: Beispiel einer quadratischen Funktion.

2.2 Beispiel (Quadratische Ergänzung)
Um den Wertebereich einer quadratischen Funktion zu bestimmen, müssen wir die Funktion f in Scheitelform bringen, damit wir das Maximum bzw. Minimum der Funktion ablesen können. Dazu betrachten wir das Beispiel aus Abbildung 2.2:

$$f(x) = -2x^2 - 3x + 3.$$

Der Scheitelpunkt liegt nach dem Schaubild etwa bei $(-1, 4)$. Um diesen rechnerisch zu bestimmen, brauchen wir die ***Methode der quadratischen Ergänzung****, bei der wir die Funktion in Scheitelform schreiben können:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 - 3x + 3 \\
&= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) && \textit{(Vorfaktor ausklammern)} \\
&= -2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) && \textit{(quadratisch ergänzen)} \\
&= -2\left(\left(x + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) && \textit{(als Binom schreiben)} \\
&= -2\cdot\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2\cdot\left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) && \textit{(ausklammern)} \\
&= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{33}{8}.
\end{aligned}$$

Damit können wir den Scheitelpunkt ablesen: $\left(-\frac{3}{4}, \frac{33}{8}\right)$, und erhalten so den Wertebereich der Funktion f:

$$\mathbb{W}_f = \left(-\infty, \frac{33}{8}\right].$$

Die Scheitelform im allgemeinen Fall lautet

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right).$$

2.3 Die Wurzelfunktion

Die (Quadrat-)Wurzelfunktion hat die Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

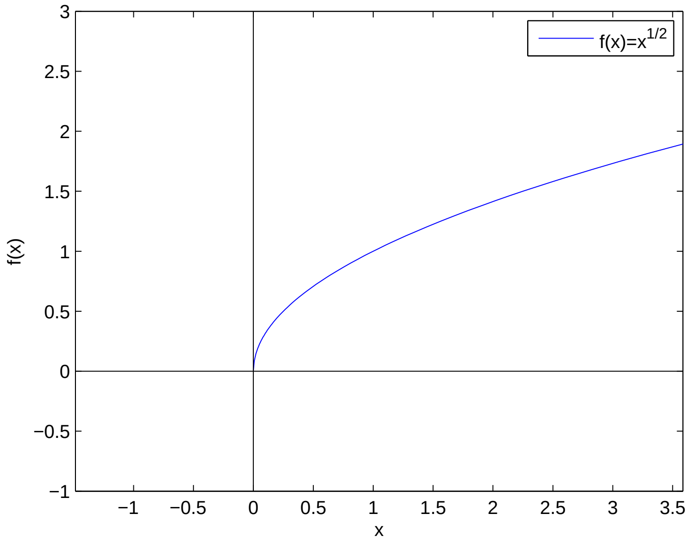

Abbildung 2.3: Die Quadrat-Wurzelfunktion.

Eigenschaften:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$.
- Monotonie: f ist streng monoton steigend.
- Beschränktheit: f ist nach unten durch die 0 beschränkt, nach oben unbeschränkt: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Die allgemeine Wurzelfunktion ist durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = a\sqrt[n]{x} + b, \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit einem $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Eigenschaften sind ähnlich der normalen Quadrat-Wurzelfunktion, hängen hier aber zusätzlich von den Parametern a und b ab.

Anmerkung: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ lässt sich der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ auf ganz $\mathbb{R}$ erweitern, vgl. dazu das Beispiel $\sqrt[3]{-8} = -2$.

2.3 Beispiel

Aufgabe: Wie lautet die Gleichung der allgemeinen Wurzelfunktion mit $n = 3$, welche durch die Punkte $(-1, 1)$ und $(27, 5)$ geht? Ansatz:

$$f(-1) = a\sqrt[3]{-1} + b = -a + b = 1 \quad \text{und} \quad f(27) = a\sqrt[3]{27} + b = 3a + b = 5.$$

Die erste Bedingung liefert $b = 1 + a$. Eingesetzt in die zweite Bedingung ergibt dies

$$4a + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Damit folgt $b = 1 + 1 = 2$ und die Wurzelgleichung lautet somit

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + 2.$$

2.4 Die Exponentialfunktion

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \end{aligned}$$

Der am meisten auftretende Fall ist der, bei dem die Basis a die eulersche Zahl e ist:

$$a = \mathrm{e} \approx 2,71828.$$

Man schreibt in diesem Fall dann

$$f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x) \quad \text{(natürliche Exponentialfunktion)}.$$

Eigenschaften:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
- Nullstellen: **Keine!**
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = a^0 = 1$ für alle $a > 0$.
- Monotonie: Fall $a > 1$: f ist streng monoton steigend. Fall $0 < a < 1$: f ist streng monoton fallend.
- Beschränktheit: f ist nach unten durch die 0 beschränkt (0 wird aber nicht angenommen), nach oben unbeschränkt:

$$\begin{aligned} a > 1: &\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ 0 < a < 1: &\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty. \end{aligned}$$

- Funktionalgleichung: Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

vgl. dazu die Potenzgesetze.

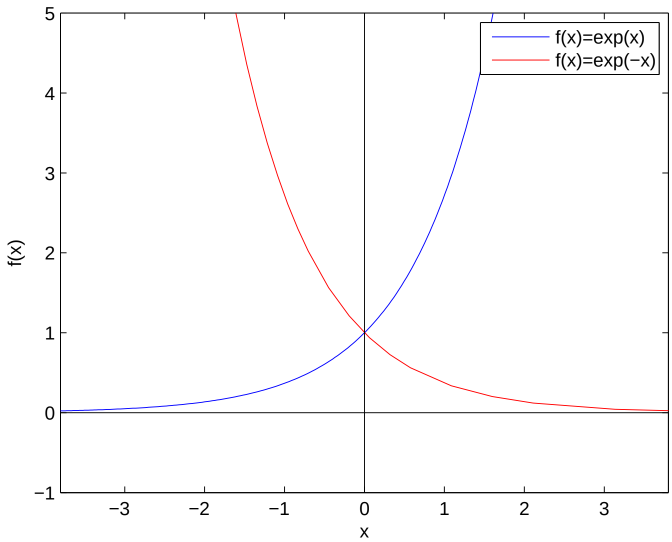

Abbildung 2.4: Zwei Beispiele einer Exponentialfunktion.

2.5 Die Logarithmusfunktion

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = \log_a(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1. \end{aligned}$$

Auch hier ist der wichtigste Fall der mit der Basis e. Man schreibt dann

$$f(x) = \log_{\mathrm{e}}(x) = \ln(x) \quad \text{(natürliche Logarithmusfunktion)}.$$

Eigenschaften:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ für jedes $a > 0$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: **Keinen!**
- Monotonie: Fall $a > 1$: f ist streng monoton steigend. Fall $0 < a < 1$: f ist streng monoton fallend.
- Beschränktheit: f ist für jedes $a > 0$ unbeschränkt. Es gilt

$$\begin{aligned} a > 1: &\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \\ 0 < a < 1: &\lim_{x\to 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

- Funktionalgleichung: Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y),$$

  vgl. dazu die Logarithmusgesetze.

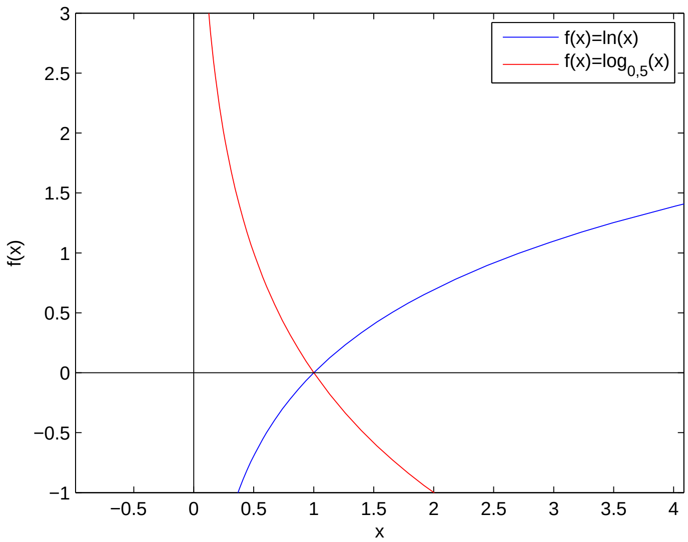

Abbildung 2.5: Zwei Beispiele einer Logarithmusfunktion.

Anmerkung: Zur Exponentialfunktion gilt folgender Zusammenhang:

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x \quad \text{und} \quad \ln(\mathrm{e}^x) = x,$$

die Logarithmusfunktion ist also die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und umgekehrt.

2.4 Beispiel

Aufgabe: Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1} zur Logarithmusfunktion

$$f(x) = \log_{0,5}(x)?$$

Lösung:

1. *Auflösen der Gleichung $y = \log_{0,5}(x)$ nach x:*

$$y = \log_{0,5}(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0,5^y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2^y} = 2^{-y}.$$

2. *Variablentausch:*

$$y = 2^{-x}.$$

D. h. insgesamt

$$f^{-1}(x) = 2^{-x}.$$

2.6 Die Betragsfunktion

Die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f,$$
$$x \mapsto f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0, \\ -x, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

heißt Betragsfunktion.

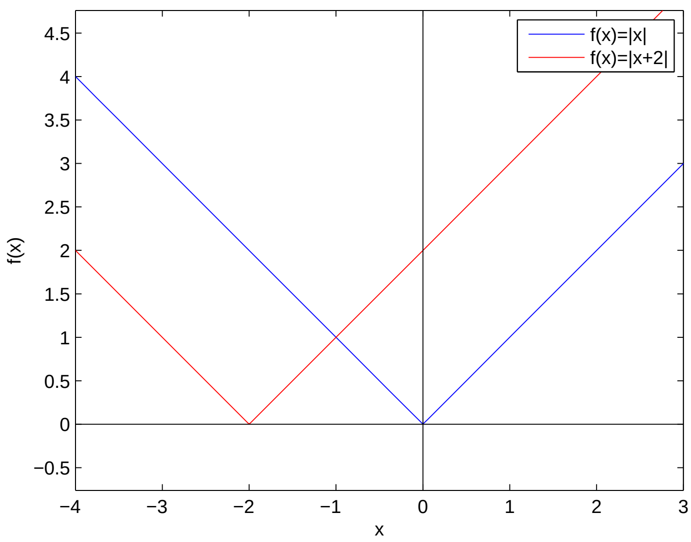

Abbildung 2.6: Die Betragsfunktion: einmal durch den Ursprung und einmal um 2 nach links verschoben.

Eigenschaften:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$.
- Monotonie: Für $x \geq 0$ ist f streng monoton steigend. Für $x < 0$ ist f streng monoton fallend.
- Beschränktheit: f ist nach unten durch die Null beschränkt, nach oben unbeschränkt.

2.5 Beispiel (Verschobene Betragsfunktion)
Betrachte folgende Variante der Betragsfunktion:

$$f(x) = |x + 2|.$$

Die betragsfreie Darstellung der Funktion lautet

$$f(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{für } x + 2 \geq 0, \ \text{d. h. } x \geq -2, \\ -x - 2, & \text{für } x + 2 < 0, \ \text{d. h. } x < -2, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 2.6.

2.7 Trigonometrische Funktionen

Die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = \sin(x). \end{aligned}$$

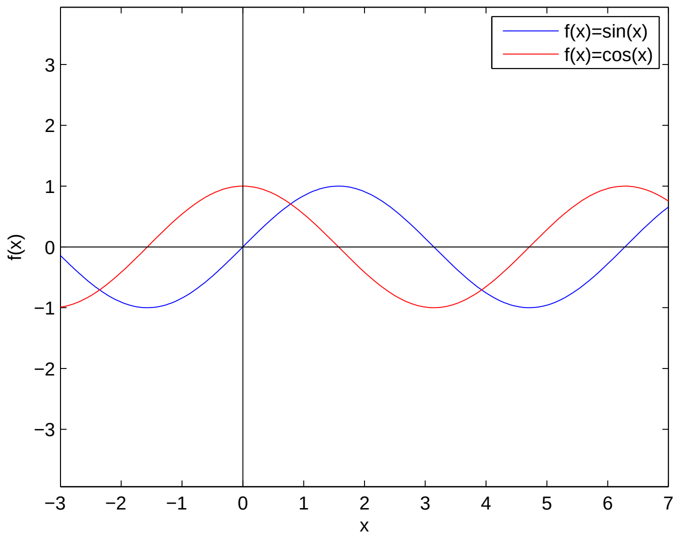

Abbildung 2.7: Sinus- und Cosinusfunktion.

Eigenschaften der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = [-1, 1]$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$.
- Monotonie: f ist weder monton steigend noch monoton fallend; Monotonie kann hier nur abschnittsweise betrachtet werden.
- Beschränktheit: f ist nach unten und nach oben beschränkt: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- Periodizität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin(x),\ n \in \mathbb{Z}$.

Die Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

Eigenschaften der Cosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = [-1, 1]$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$.
- Monotonie und Beschränktheit sind wie bei der Sinusfunktion.
- Periodizität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos(x),\ n \in \mathbb{Z}$.

Anmerkung: Zwischen Sinus und Cosinus besteht folgender wichtiger Zusammenhang:

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad (\text{„}\textbf{Trigonometrischer Pythagoras}\text{“}).$$

Die Tangensfunktion:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{D}_f &\to \mathbb{W}_f, \\ x &\mapsto f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

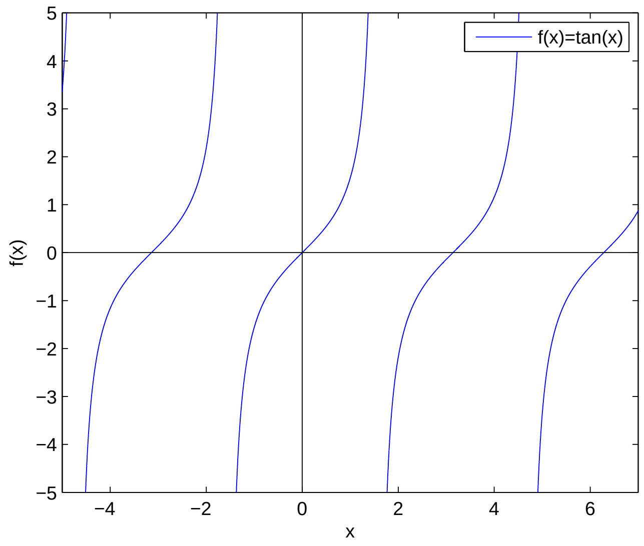

Abbildung 2.8: Tangensfunktion.

Eigenschaften der Tangensfunktion $f(x) = \tan(x)$:

- Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.
- Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$.

- Monotonie: Monotonie ist auch hier nur abschnittsweise erklärbar.
- Beschränktheit: f ist unbeschränkt, es gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$
$$\lim_{x \to (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}} f(x) = \pm\infty.$$
- Periodizität: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ gilt $\tan(x + n \cdot \pi) = \tan(x),\ n \in \mathbb{Z}$.

2.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden Funktionen
$$f(x) = -2x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = 2x^2 + 8x + 6.$$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von g und zeichnen Sie beide Funktionen in ein Schaubild.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte des Schaubildes der Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 4 - \frac{6}{x}$, $\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ auf Beschränktheit. Skizzieren Sie f in einem Schaubild.

c) Bestimmen Sie die quadratische Funktion, welche durch die drei Punkte $(0, -2)$, $(1, 2)$ und $(3, -8)$ verläuft.

d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f (Monotonie beachten!) und skizzieren Sie die Schaubilder von f und f^{-1}.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ auf maximalen Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und asymptotisches Verhalten. Skizzieren Sie anschließend das Schaubild von f.

Aufgabe 4

a) Zeichnen Sie das Schaubild der folgenden Funktionen: $f(x) = |x(2-x)|$ und $g(x) = x + |x|$. Stellen Sie dazu die Funktionen betragsfrei dar.

b) Schreiben Sie folgende Ungleichung betragsfrei: $|x| + |y| \leq 5$. Wie lässt sich diese Ungleichung in einem Koordinatensystem veranschaulichen?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\cos(x) + 1$.

a) Bestimmen Sie **ohne Ableitung** Maximum und Minimum der Funktion. Wo liegen die zugehörigen x-Werte?

b) Für welche x-Werte nimmt f den Wert 1 an?

c) Zeichnen Sie f in ein Schaubild. Nehmen Sie dabei als Grundlage die einfache cos-Funktion und konstruieren Sie f mittels
   - einer Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 und
   - einer Verschiebung in y-Richtung um 1.

Aufgabe 6

Geben Sie eine kubische Funktion f an, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(1) = 0$.

Hinweis: Eine kubische Funktion hat die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3 Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel geht es um die grundlegenden Konzepte in der Analysis: Differentiation und Integration. Bevor wir zu diesen beiden Themen kommen, sollen zunächst kurz die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion wiederholt werden.

3.1 Der Grenzwertbegriff und Stetigkeit einer Funktion

Unter einem **Grenzwert einer Funktion** versteht man das Verhalten einer Funktion f, wenn sich die unabhängige Variable x einem bestimmten Wert x_0 annähert. Man sagt: Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und hat den Wert g, falls rechts- und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen:

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = g.$$

Man schreibt in diesem Fall kurz

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

3.1 Beispiel
Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 \text{ für } x \leq 1, \\ 3x+1 \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

besitzt einen rechts- und linksseitigen Grenzwert bei $x_0 = 1$*:*

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = 4, \quad \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = 3.$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert jedoch nicht, denn*

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = 3 \neq 4 = \lim_{x\searrow x_0} f(x).$$

3.2 Beispiel
Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Diese hat für $x \searrow 0$ *bzw.* $x \to \infty$ *folgende Grenzwerte:*

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Die **Stetigkeit einer Funktion** besagt anschaulich, dass man den Funktionsgraph ohne abzusetzen „in einem Zug“ zeichnen kann. An einer Stelle x_0 bedeutet dies: Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, falls der Grenzwert an der Stelle x_0 existiert und mit dem Funktionswert in x_0 übereinstimmt:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

bzw. kurz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.3 Beispiel

a) *Für die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ für } x \leq 1, \\ x \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = 1, \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1, \quad f(1) = 1,$$

d. h. f ist in $x_0 = 1$ stetig.

b) *Die Funktion aus Beispiel 3.1 ist nicht stetig in $x_0 = 1$.*

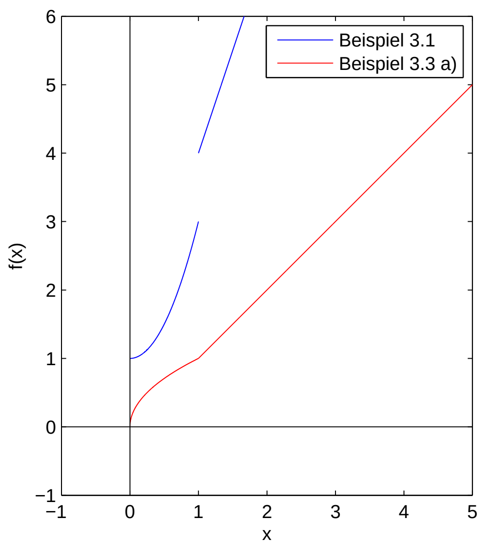

Abbildung 3.1: Eine stetige und eine nicht-stetige Funktion.

3.2 Differentiation

Oftmals ist nicht nur der Funktionswert an einer Stelle x_0 von Interesse, sondern auch die Änderung des Funktionsverlaufs in einer Umgebung des Punktes x_0. Hier kommt nun der Begriff der **Ableitung** ins Spiel. Die Ableitung an einer Stelle x_0 gibt die Steigung einer Funktion f bei x_0 an und ist folgendermaßen definiert: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Man schreibt dann

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

und nennt $f'(x_0)$ die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Der Ausdruck $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt Differenzenquotient.

3.4 Beispiel
Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$, denn es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

3.5 Beispiel
Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn für $x > 0$ ist $f(x) = x$ und damit gilt für den rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\searrow 0} 1 = 1.$$

Für $x < 0$ ist $f(x) = -x$ und für den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten erhalten wir

$$\lim_{h\nearrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\nearrow 0} -1 = -1.$$

D. h. rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein und damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

nicht. Anschauliche Begründung: Die Funktion hat bei $x_0 = 0$ einen Knick.

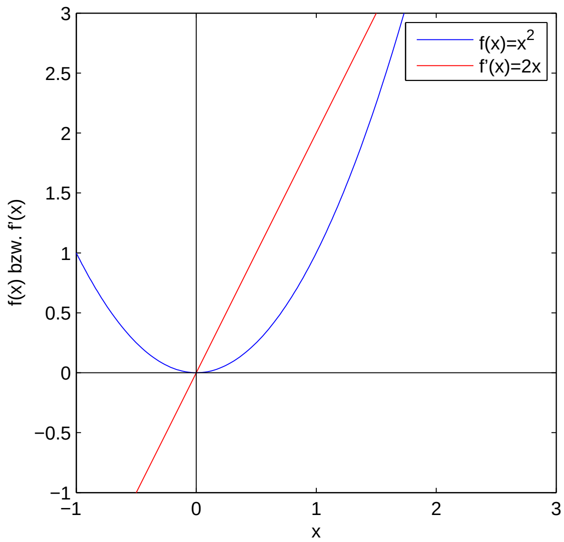

Abbildung 3.2: Die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Ableitungsfunktion.

3.6 Beispiel (Ableitungen elementarer Funktionen)

a) $f(x) = ax + b, \quad f'(x) = a.$

b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$

c) $f(x) = \exp(x), \quad f'(x) = \exp(x).$

d) $f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$

e) $f(x) = x^n, \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

g) $f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x).$

h) $f(x) = \cos(x), \quad f'(x) = -\sin(x).$

Um auch Kombinationen von verschiedenen Funktionen ableiten zu können, gibt es gewisse Ableitungsregeln, die hier im Folgenden aufgelistet werden:

Konstante Faktoren und konstante Summanden:

$$g(x) = cf(x) + d, \; c, d \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = cf'(x).$$

3.7 Beispiel
$f(x) = x^2, \; c = 3, \; d = 2$:

$$g(x) = 3x^2 + 2 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Summen von Funktionen:

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

3.8 Beispiel
$u(x) = \sin(x),\ v(x) = \ln(x)$:

$$f(x) = \sin(x) + \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{x}.$$

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

3.9 Beispiel
$u(x) = \exp(x),\ v(x) = \sqrt{x}$:

$$f(x) = \exp(x) \cdot \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \exp(x) \cdot \sqrt{x} + \exp(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \exp(x)\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x}\right).$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},\ v(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}.$$

3.10 Beispiel
$u(x) = x + 1,\ v(x) = \exp(x)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{\exp(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \exp(x) - (x+1) \cdot \exp(x)}{\exp(x)^2} = \frac{-x\exp(x)}{\exp(x)^2} = -\frac{x}{\exp(x)}.$$

Kettenregel:

$$h(x) = f(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

3.11 Beispiel
Die Ableitung der Funktion $h(x) = (3x+1)^2$ ist $h'(x) = 18x+6$, denn mit der Kettenregel folgt für $f(x) = x^2$ und $g(x) = 3x + 1$

$$h'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot 3 = 2(3x+1) \cdot 3 = 18x + 6.$$

3.3 Integration

Einige Probleme der Mathematik verlangen, eine Funktion aus Informationen über ihre Ableitung zu finden. Dieser Prozess kann als „Umkehrung“ zur Differentiation betrachtet werden und wird allgemein Integration genannt. Die Fragestellung lautet demnach: Finde eine Funktion F, für die gilt:

$$F'(x) = f(x),$$

wobei die Funktion f bekannt ist. Die Funktion F wird dabei als **Stammfunktion** bezeichnet.

3.12 Beispiel

Für die Funktion $f(x) = x^2$ gilt

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3,$$

denn $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Anmerkung: Im letzten Beispiel ist auch die Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3$ eine Stammfunktion, d. h. diese ist nicht eindeutig. Allgemein gilt nämlich: Ist F eine Stammfunktion einer Funktion f, so ist für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ auch $F + C$ eine Stammfunkion.

Eine Notation für die Stammfunktion einer Funktion f ist die folgende:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Den Ausdruck $\int f(x)\,dx$ bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** („unbestimmt“, weil die Konstante C keinen konkreten Wert hat).

3.13 Beispiel (Stammfunktionen elementarer Funktionen)

a) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R},\ n \neq -1.$

b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C, \quad x \neq 0.$

c) $\int \exp(x)\,dx = \exp(x) + C.$

Neben dem unbestimmten Integral gibt es auch noch das **bestimmte Integral**, welches einen konkreten Wert annimmt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dabei bezeichnen a und b die Integrationsgrenzen.

3.14 Beispiel

Berechne das bestimmte Integral von $f(x) = x$ mit den Grenzen $a = 1$ und $b = 2$:

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\bigg|_1^2 = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{3}{2}.$$

Geometrische Interpretation: Der Wert $\frac{3}{2}$ ist der Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, den zwei Parallelen zur y-Achse $x = 1$ und $x = 2$ sowie der x-Achse begrenzt wird, vgl. Abbildung 3.3.

Wie auch bei der Differentiation gibt es bei der Integration Regeln, um Kombinationen von Funktionen integrieren zu können. Wir beschränken uns hier auf das unbestimmte Integral.

<u>Linearität des Integrals:</u>

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad \text{und}$$
$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

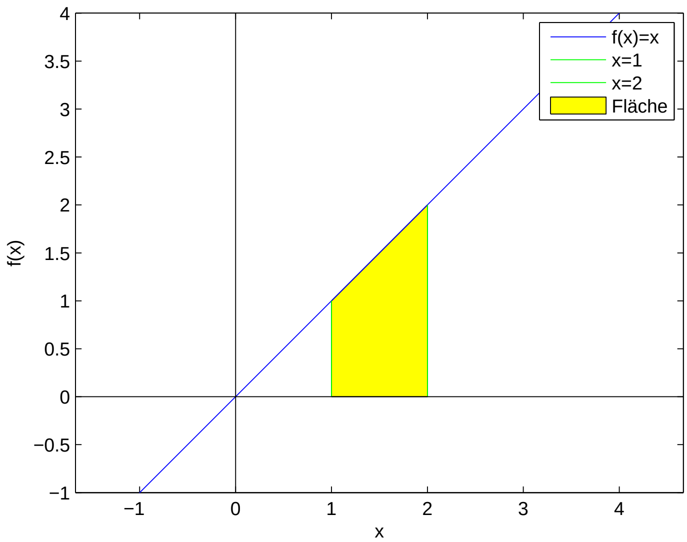

Abbildung 3.3: Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals.

3.15 Beispiel

$f(x) = \exp(x)$, $g(x) = x^2$ und $a = 2$:

$$\int \exp(x) + x^2\,dx = \int \exp(x)\,dx + \int x^2\,dx = \exp(x) + \frac{1}{3}x^3 + C \quad \textit{und}$$

$$\int 2\exp(x)\,dx = 2\int \exp(x)\,dx = 2\exp(x) + C.$$

Lineare Substitution:

$$\int f(ax+b)\,dx = \int \frac{1}{a}f(z)\,dz = \frac{1}{a}\int f(z)\,dz, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Dabei haben wir die Substitution $z = ax + b$ vorgenommen.

3.16 Beispiel

Berechne das folgende Integral durch lineare Substitution:

$$\int \sqrt{-2x+3}\,dx.$$

Hier ist $f(z) = \sqrt{z}$ und $a = -2$, $b = 3$, d. h. $z = -2x + 3$. Damit folgt durch die Regel „lineare Substitution“

$$\int \sqrt{-2x+3}\,dx = \frac{1}{-2}\int \sqrt{z}\,dz = -\frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(-2x+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Betrachten wir beispielsweise die Integrationsgrenzen 1 und $\frac{3}{2}$, so erhalten wir für das bestimmte Integral

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{-2x+3}\,dx = -\frac{1}{3}(-2x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(-3+3)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{3}(-2+3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}.$$

3.4 Anwendungen

Extremwertberechnung:

Um Minima und Maxima einer Funktion zu bestimmen, braucht man das Konzept der Differentiation. Unter anderem taucht hier auch der Begriff der zweiten Ableitung einer Funktion f auf. Da die (erste) Ableitung f' selbst wieder eine Funktion ist, ist die zweite Ableitung von f die erste Ableitung von f':

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)'.$$

3.17 Beispiel
Für $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \textit{und} \quad f''(x) = 12x^2 - 4.$$

Um die Extremwerte der Funktion aus dem letzten Beispiel zu bestimmen, muss man die erste Ableitung Null setzen und mit der zweiten Ableitung überprüfen, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

3.18 Beispiel (Fortsetzung von Beispiel 3.17)
Notwendiges Kriterium für ein Extremum:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \textit{ oder } x = -1 \textit{ oder } x = 1.$$

D. h. die Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$ sind Kandidaten für ein Extremum.

Hinreichendes Kriterium:

- $f''(x_1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Maximum:* $f(x_1) = 1$,
- $f''(x_{2,3}) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Minimum:* $f(x_{2,3}) = 0$,

vgl. Abbildung 3.4.

Anmerkung: Falls für mögliche Extremstellen die zweite Ableitung Null wird, kann man keine Aussage darüber machen, ob ein Minimum oder ein Maximun vorliegt. In diesem Fall muss man untersuchen, ob die erste Ableitung dort einen Vorzeichenwechsel hat.

Flächenberechnung:

Kommen wir nochmal zur Flächenberechnung mittels Integration, vgl. Beispiel 3.14. Jetzt wollen wir aber den Inhalt einer Fläche berechnen, die durch den Graphen zweier Funktionen begrenzt wird.

3.19 Beispiel
Betrachte die beiden Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 5, \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Die in Abbildung 3.5 beschriebene Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen f und g hat den Inhalt

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \right|.$$

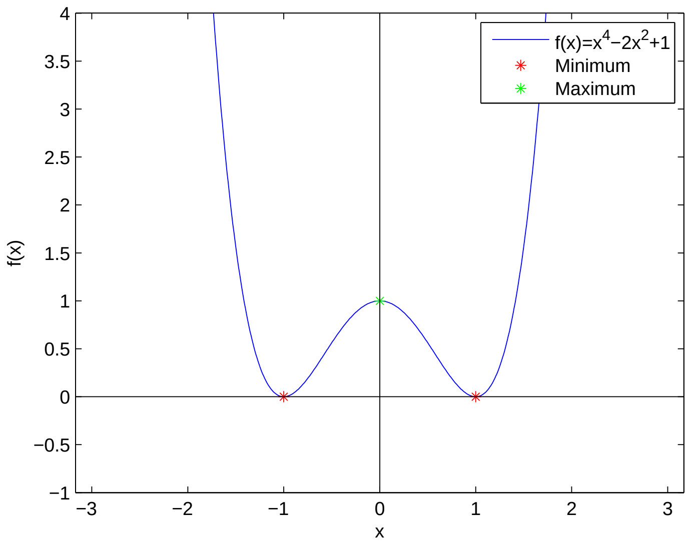

Abbildung 3.4: Beispiel für ein lokales Maximum und zwei globale Minima.

Die Grenzen a und b ergeben sich aus dem Schnitt der beiden Funktionen:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 5 = x^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{2},$$

d. h. $a = -\sqrt{2}$ *und* $b = \sqrt{2}$*. Damit erhalten wir für den Flächeninhalt*

$$A = \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -x^2 + 5 - (x^2 + 1)\, dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -2x^2 + 4\, dx \right| = -2\frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + 4x\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

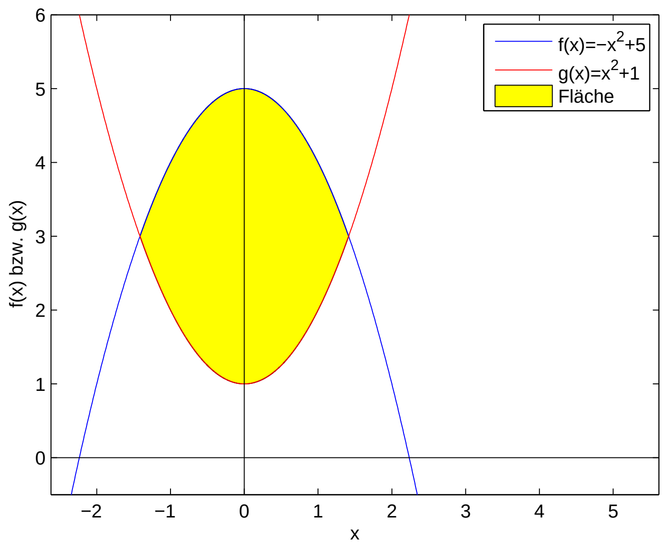

Abbildung 3.5: Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen.

3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-4x}}$. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Aufgabe 2

Für welchen Wert a ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{für } x \leq 1, \\ 3x^2 + 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist die Funktion für dieses a auch differenzierbar bei $x_0 = 1$? (Begründung angeben!)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitung und den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (3x^5 - 2x^2)(1 - 2x^4)$,

b) $f(x) = (3x^2 - 2\exp(x))/(x^2 + 1)$,

c) $f(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 5})$,

d) $f(x) = \sin(1/x)$,

e) $f(x) = \tan(x)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von

a) $f(x) = 1 + x + x^4$,

b) $f(x) = \exp(x) + x^{3/2}$,

c) $f(x) = x^{-2} - 2x^{-1} - 1 + \sqrt{x} + 3,5x^{2,5}$,

d) $f(x) = (5x + 4)^3$,

e) $f(x) = \sin(6x)$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{5} \sqrt{2x - 1}\, dx$$

und geben Sie eine geometrische Interpretation an.

Aufgabe 6

Welche Funktion f erfüllt die Bedingung

$$f'(x) = 3f(x)?$$

Was passiert, wenn man zusätzlich die Bedingung $f(0) = 2$ fordert?

Literaturverzeichnis

[1] Hohloch, Eberhard ; Kümmerer, Harro ; Gilg, Jürgen: *Brücken zur Mathematik, Band 1: Grundlagen*. 4. Auflage. Cornelsen Verlag, 2006.

[2] Holey, Thomas ; Wiedemann, Armin: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. 2. Auflage. Physica-Verlag, 2007.

[3] Schropp, Johannes: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I*. Vorlesungsskript, 2009.

[4] Sydsaeter, Knut ; Hammond, Peter: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Basiswissen mit Praxisbezug*. 3. Auflage. Pearson Studium, 2009.